https://www.scilook.eu/index.php/slif/article/view/slif19-01-028
DOI: 10.30888/2415-7538.2020-19-01-028

УДК 629.162.2

MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE FIELDS ON THE ELEMENTS OF THE STRUCTURE

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ НА ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ

Selezneva N.V. /Селезньова Н.В.
teach. / викл.
Dnipro Basic Medical College, Dnipro, B. Khmelnytskiy av., 49000
Дніпровський базовий медичний коледж, м. Дніпро, пр. Б. Хмельницького, 23, 49000
Tikhaya L.S. /Тихая Л.С.
PhD., as. prof. / к.х.н., доц.
Zybaylo S.M. /Зыбайло С.Н.
PhD., as .prof. / к.т.н., доц.
ORCID: 0000-0001-5122-7692
SPIN: 4580-2751
Ukrainian State Chemical and Technological University, Dnipro, Gagarina av. 8, 49005
Український державний хіміко-технологічний університет, м. Дніпро, пр. Гагаріна 8, 49005

Аннотация. *Предложены решения задачи с подвижными границами, основанные на решении задачи Коши и итерационных методов. Решение соответствующих краевых задач для уравнений в частных производных сведено к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены результаты параметрических исследований.*

Ключевые слова: *математические модели, тепловое состояние, экстремальные условия, аналитические методы.*

Вступление.

В настоящее время определение температурных полей элементов конструкций при воздействии на них полей различной физической природы требует решения целого комплекса взаимосвязанных задач газовой динамики, теории теплопроводности, т.е. решения внешних задач сопряженного теплообмена. Учет неоднородности протекания большинства процессов при решении задач в такой сложной сопряженной постановке представляет трудности с математической и вычислительной точек зрения [1].

Структурные решения многопараметрических задач теплопроводности для составных элементов конструкций обладают однообразной вычислительной схемой; позволяют выделять воздействия каждого из действующих на конструкцию электромагнитных полей и оценить их влияние на температурное поле в любом слое в заданный момент времени, а также учитывать влияние внешних граничных условий и виды неидеального теплового контакта [2, 3].

Задачи теплопереноса в системах тел с подвижными границами относятся к классу существенно нелинейных задач. Их точное решение получить, как правило, не удается, поэтому обычно применяют приближенные методы решения, как аналитические, так и численные.

Методы исследования.

Изменение размеров и температуры оплавляющегося элемента конструкции с достаточной точностью описывается задачей Стефана [4].

Предшествующий задаче Стефана режим прогрева при этом, как правило, предполагается заданным и учитывается через начальные условия. В ряде случаев эти условия неизвестны. Поэтому практическое значение имеет разработка методов получения замкнутых решений задачи Стефана, объединяющих в сквозном счете режимы прогрева и оплавления [5].

При экстремальных условиях нагрева и переохлаждения отдельные слои составных покрытий претерпевают ряд физико-химических превращений ещё до выхода на внешнюю поверхность. При этом могут существовать не одно, а несколько фазовых превращений, последовательно переходящих из одного состояния в другое. Эти процессы сопровождаются изменением плотности исходного материала, выделением газообразных продуктов, тепловыми эффектами физико-химических превращений и т.п. Общей чертой зон фазовых превращений является то, что между ними существуют изотермические поверхности, разделяющие зоны. При этом на границах раздела зон выделяется некоторое количество тепла и имеет место условие Стефана, которое позволяет произвести сопряжение температурных полей смежных зон.

Постановка задачи исследования.

Рассмотрим задачу Стефана для оплавляющихся элементов коструукции при следующих предположениях. Задача является одномерной, теплоподвод из окружающей среды осуществляется по унифицированному закону Ньютона, с некоторого момента времени $Fo = Fo_{\varphi}$ тело разрушается в результате оплавления и образовавшаяся фаза удаляется с поверхности без дополнительных затрат энергии. В режиме оплавления на поверхности раздела фаз сохраняется температура фазового превращения T_{φ} (предполагается зависящей от времени) и тепловой баланс между тепловым эффектом превращения и тепловыми потоками [2, 6,7].

При принятых выше предположениях математическая формулировка задачи теплопроводности в режимах прогрева и оплавления выглядит следующим образом. В режиме прогрева решение задачи состоит в отыскании функции T, удовлетворяющей в области $D_1 = \{0 \le x \le 1, 0 \le Fo \le Fo_{\varphi}\}$ уравнению:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{m}{x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{1}$$

граничным $\eta_0 \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=1} = Bi(Fo)\left[T_c(Fo) - \mu_0 T\right]\Big|_{x=1}, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ (2)

и начальному условию $T\big|_{Fo=0} = \varphi(x)$, (3)

где m - параметр формы тела (m=0 - плоское тело, m=1 - цилиндрическое, m=2 - сферическое); η_0, μ_0 - граничные константы, принимающие значения - 0, ± 1.

В режиме оплавления на границе фазового перехода задаются условиями:

$$\frac{\partial Y}{\partial Fo} = \frac{1}{Ko}\left[\frac{\partial T}{\partial x} - Q(Fo)\right]\Bigg|_{x=\delta Y(Fo)}, \tag{4}$$

где $Y(Fo) = \left[1 - Y^*(Fo)\right]$ - неизвестный закон перемещения границы области; $D_2 = \{0 \le x \le Y(Fo), Fo_{\varphi} \le Fo \le \infty\}$; $Ko = L / cRT_{\varphi}$ - критерий Коссовича;

$T_\varphi, Q(Fo) = Bi(Fo)[T_c - \mu_0 T_\varphi]$ - заданные функции.

К уравнению (4) необходимо добавить еще начальное условие:

$$Y\big|_{Fo=Fo_\varphi} = 1\,. \tag{5}$$

Функция T в области D_2 определяется как решение уравнения (1) при следующих условиях:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \ T\big|_{x=Y(Fo)} = T_\varphi(Fo), \qquad T\big|_{Fo=Fo_\varphi} = \varphi_1(x), \tag{6}$$

где функция $\varphi_1(x)$ определяется из решения задачи в режиме прогрева по условию:

$$T\big|_{x=1} = T_\varphi, \tag{7}$$

отсюда находим и момент времени Fo_φ, соответствующий началу фазового перехода. Закон перемещения границы области $Y(Fo)$ определяется из совместного решения начально-краевой задачи (1)-(7) и уравнения (4) с начальным условием (5).

В основу построения приближенных решений положим решение задачи Коши для уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши [2, 6]:

$$T\big|_{x=Y(Fo)} = T_\varphi(Fo), \ \ \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{8}$$

запишем в виде $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{S_n} f^{(n)}(Fo),$ (9)

где $S_0 = 1,\ S_n = 2^n (n!)(m+1)(m+3)...(m+2n-1),$ (10)

$$\Theta(Fo,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(n)}(Fo), \qquad 0 \le x \ge S(Fo), \tag{11}$$

где $\Theta(Fo,x) = \dfrac{T(Fo,x) - T_0}{T_0}$ - относительная температура, $f(Fo) = \left[T(Fo,0) - T_0\right]/T_0$ - относительная температура теплоизолированной поверхности. Остальные обозначения в (11) общепринятые.

Алгоритм построения приближенных решений с применением (11) заключается в приближенном определении функции $f(Fo)$. Поскольку решение (11) определяет температурное поле всей области через изменение температуры на границе, то функция $f(Fo)$ в (11) оказывается неизвестной. Для определения $f(Fo)$ можно использовать условие на подвижной границе. Предположим, что это условие задано в виде:

$$\Theta(Fo,x)\big|_{x=S(Fo)} = \Theta_{S(Fo)} \tag{12}$$

Подставляя (11) в (12) получим обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка относительно $f(Fo)$:

$$\Theta_S(Fo) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{S(Fo)^{2n}}{(2n)!} f^{(n)}(Fo), \tag{13}$$

где N – некоторое конечное число.

Анализ показывает, что сохранение конечного числа слагаемых от бесконечного ряда (13) уже при N = 2, 3 позволяет получить приближенные решения с точностью не превышающей 3% во всем временном интервале $[0,\infty)$.

Таким образом, решение поставленной задачи (1) - (7) получено в замкнутом виде и сведено к стандартной процедуре - интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши.

Результаты и обсуждение.

Для апробации разработанного алгоритма проведенны математические расчеты при разных значениях параметров m, N и при $\mu_0 = \eta_0 = 1$. Если параметр формы тела m=1, а параметры граничных условий принимают значения $\mu_0 = 0, \eta_0 = 1, q_w(Fo) = Bi(Fo)T_c(Fo),$ то имеем типичную задачу Неймана для цилиндрической области и т.д. При конкретном значении параметра N, характеризующего точность математической модели, получаем приближенные решения поставленной задачи. В работе [7] показано, что параметр N можно использовать равным 2÷5. При этом погрешность решения с увеличением N быстро убывает и при N= 4÷5 невязка между этими реализациями практически равна нулю во всей пространственно-временной области, что экспериментально подтверждает правомерность и регулярность редуцирования бесконечных рядов по n до n=N. При этом принимаем исходные данные:

$Bi(Fo) = 1.2\ exp(Fo/2)$, $T_\varphi = 1$, $Ko = 3{,}0$, $\varphi(x) = 0$, $T_c = 1 + 0{,}5Fo + 0{,}4Fo^2 + 0{,}3Fo^3$.

Результаты расчетов приведены в таблицах 1 и 2. Анализ полученных результатов показывает, что изменение температуры при различных значениях параметра редуцирования N практически не отличаются друг от друга с Fo=0,5 (N = 3, 4, 5, 6); аналогичная закономерность имеет место и при решении задачи в режиме оплавления, что подтверждает результаты решения задач прогрева для конструкций простой формы.

Заключение и выводы.

Применение решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в сочетании с методом итерации является эффективным при построении приближенных решений задачи Стефана для плоского тела.

Таблица 1

Симметричная задача теплопроводности для цилиндра (m = 1, N = 5)

Fo	$S(Fo)$	$f_{cp}(Fo)$	$Bi(Fo)$	Изменение температуры по координате Xє[0,1]		
				0,0	0,5	1,0
0,10	1,00000	1,05342	1,21194	0,09525	0,11434	0,29057
0,30	1,00000	1,18534	1,23642	0,30193	0,38613	0,63737
0,50	1,00000	1,34947	1,26140	0,56531	0,64660	0,88133
0,70	0,99344	1,54596	1,28688	0,80385	0,86668	1,00110
0,90	0,94660	1,77496	1,13128	0,93935	0,96796	1,00110
1,10	0,86921	2,03660	1,33940	0,98566	0,99256	1,00110
1,30	0,76318	2,33104	1,36646	0,99729	0,99905	1,00110
1,50	0,62587	2,65841	1,39406	0,99977	0,99998	1,00110
1,70	0,45339	3,01885	1,42222	1,00000	1,00000	1,00110
1,90	0,24129	3,41252	1,45095	1,00000	1,00000	1,00110

Таблица 2

Симметричная задача теплопроводности для шара (m = 2, N = 5)

Fo	$S(Fo)$	$f_{cp}(Fo)$	$Bi(Fo)$	Изменение температуры по координате Xє[0,1]		
				0,0	0,5	1,0
0,10	1,00000	1,06342	1,21194	0,09525	0,16225	0,35642
0,30	1,00000	1,18534	1,23642	0,46332	0,53633	0,75983
0,50	1,00004	1,34947	1,26140	0,78447	0,84442	1,00012
0,70	0,97087	1,54596	1,28688	0,96565	0,98198	1,00012
0,90	0,91381	1,77496	1,13128	0,99816	0,99965	1,00012
1,10	0,83378	2,03660	1,33940	1,00009	1,00008	1,00012
1,30	0,72713	2,33104	1,36646	1,00001	1,00000	1,00012
1,50	0,58972	2,65841	1,39406	1,00000	1,00000	1,00012
1,70	0,41723	3,01885	1,42222	1,00000	1,00000	1,00012
1,90	0,20513	3,41252	1,45095	1,00000	1,00000	1,00012

Рассмотренные задачи и предложенный структурный метод решения дает возможность использовать результаты для качественного анализа температурных полей составных элементов конструкций при экстремальных воздействиях.

Литература:

1. Селезнева, Н.В. Математическое моделирование температурных полей многослойных тел при экстремальных тепловых воздействиях [Текст]/ Н.В. Селезнева// Системні технології. – 2010. – Вип. 2. – С.67-73.

2. Веселовский, В.Б. Математическое моделирование и совместное решение задач движения, прогрева и оплавления падающих космических объектов [Текст]/ В.Б. Веселовский // Тепломассообмен: Радиационный и комбинированный теплообмен. Т. II. – Минск: ИТМО НАНБ, 2000. – С. 89-98.

3. Веселовский, В.Б. Математическое моделирование образования и разрушения гололедо-изморозевых отложений на элементах конструкций [Текст]/ В.Б. Веселовский, Н.В. Селезнева, К.В. Горелова // Вестник ХНТУ. - 2006. – С.106-110.

4. Гусейнов, Ш.Э. Метод сведения обобщенной задачи Стефана к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению типа Вольтерра [Текст]/ Ш.Э. Гусейнов //Computer Modelling and New Technologies. - 2006. - Vol.10. - №.2. – P. 57-67.

5. Бородин, М.А. Задача Стефана [Текст]/ М.А. Бородин// Український математичний вісник. – 2011. - Т. 8. - № 1. – С. 17 – 54.

6. Веселовский, В.Б. Математическое моделирование и совместное решение задач прогрева и оплавления при движении тел в атмосфере / В.Б. Веселовский, Н.В. Селезнева [Текст]// Вестник ХНТУ. – 2008. – Вып. 2. – С.176-180.

7. Веселовский В.Б. Математическое моделирование и расчет тепловых процессов в составных телах с подвижными границами [Текст] / В.Б.

Веселовский, А.И. Губин, Н.В. Селезнева // Материалы VI Международной конференции: Проблемы промышленной теплотехники (Киев: Институт технической теплофизики НАН Украины, 2005). – С.274-275.

Abstract. *Solutions of the problem with moving boundaries based on the task of Cauchy's problem and iterative methods are proposed. The solution of the corresponding boundary value problems for partial differential equations is reduced to the integration of a system of ordinary differential equations. The results of parametric studies are presented.*

Key words: *Mathematical models, thermal mill, extreme minds, analytical methods.*

Статья отправлена: 16.11.2020 г.