



УДК 531.383

## EVOLUTION OF ROTATIONS OF LAGRANGE TOP UNDER THE ACTION OF SMALL CONTROL MOMENT

## ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАЛОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО МОМЕНТА

Kozachenko T.A. / Козаченко Т.А.

*s.p.m.s., as. prof. / к.ф.-м.н., доц.*

ORCID: 0000-0001-9034-3776

Kozachenko K.A. / Козаченко К.А.

*student / студент**Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, 65029**Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, 65029*

**Аннотация.** Исследуются вращательные движения симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки, под действием нестационарного возмущающего момента сил. Тело предполагается быстро закрученным, а возмущающие моменты малыми по сравнению с восстанавливающим моментом. Для решения системы дифференциальных уравнений используется численное интегрирование. В качестве примера рассмотрена механическая модель, отвечающая задаче о приведении волчка в состояние регулярной прецессии.

**Ключевые слова:** случай Лагранжа, восстанавливающий и возмущающий моменты, угол нутации.

**Введение.**

Задача о вращении твердого тела относительно неподвижной точки издавна привлекает внимание исследователей. В теоретическом аспекте эта проблема заинтересовала специалистов в области теоретической механики еще в XVIII веке. Исследования в этой области продолжаются и связаны с анализом вращательных движений твердого тела в небесной механике, движений вращающегося снаряда, гироскопии.

В работах [1–3] проведены исследования эволюции вращений волчка Лагранжа с помощью метода усреднения. В [1,2] изложена процедура усреднения уравнений движения твердого тела, близкого к регулярной прецессии в случае Лагранжа, при предположениях, что возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим моментом. Получены усредненные системы уравнений в первом и втором приближении. В [3] рассмотрены возмущенные вращательные движения твердого тела, под действием нестационарного возмущающего момента и восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации. Исследованы усредненные системы уравнений в первом и втором приближении в случае линейной диссипации. В данной статье проводится исследование неусредненной системы уравнений движения тела с помощью численного интегрирования.

**Постановка задачи.**

Рассматриваются движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием восстанавливающего и возмущающего моментов. Восстанавливающий момент  $k$  предполагается постоянной величиной, а возмущающий момент медленно изменяющимся во времени  $\tau = \varepsilon t$  ( $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр,  $t$  – время). Уравнения движения имеют вид:



$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - A)qr &= k \sin \theta \cos \varphi + M_1 \\
 A\dot{q} + (A - C)pr &= -k \sin \theta \sin \varphi + M_2 \\
 C\dot{r} &= M_3, \quad \dot{\psi} = (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta \\
 \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta \\
 M_i &= M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t, \quad (i = 1, 2, 3)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $p, q, r$  – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси,  $M_i$  являются  $2\pi$ –периодическими функциями от углов Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ , а также зависят от медленного времени  $\tau = \varepsilon t$ ;  $A$  – экваториальный,  $C$  – осевой момент инерции, ( $A \neq C$ ).

Предположим, что выполнены следующие неравенства [1]:

$$(p^2 + q^2)^{1/2} \ll r, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_i| \ll k, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим моментом.

Неравенства (2) позволяют ввести следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 p &= \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k = \varepsilon K, \\
 M_i &= \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \quad (i = 1, 2, 3)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Функции  $M_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ), а также переменные и постоянные  $P, Q, r, \psi, \theta, K, A, C$  предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ставится задача исследования поведения решений системы (1) при малом  $\varepsilon$ , если выполнены условия (2), (3), на интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$  [1,2].

Для преобразования системы (1) к виду удобному для исследования используется процедура изложенная в работах [1–3]. Согласно указанной процедуре, система (1) с помощью ряда преобразований, замены переменных

$$\begin{aligned}
 P &= a \cos \gamma + b \sin \gamma + KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \sin \varphi \\
 Q &= a \sin \gamma - b \cos \gamma + KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \cos \varphi \\
 r &= r_0 + \varepsilon \delta, \quad \gamma = (C - A)A^{-1}rt, \quad \alpha = \gamma + \varphi
 \end{aligned} \tag{4}$$

и разделения переменных на медленные и быстрые приводится к виду системы уравнений (5).

Здесь  $a, b, \delta, \psi, \theta$  – медленные переменные;  $\gamma, \alpha$  – быстрые переменные. Система (5) является системой нелинейных дифференциальных уравнений с двумя фазами  $\gamma, \alpha$ . Получить решение системы (5) в аналитическом виде является весьма затруднительным. В работах [1–3] с помощью метода усреднения для системы уравнений (5) были получены решения уравнений в первом и втором приближении. В данной работе система (5) решена численно с помощью программного пакета Maple.



$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) - \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta (b - KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \\
 &\quad + \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta (b - 2KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \varepsilon^2 KC^{-2}r_0^{-2} M_3^0 \sin \theta \sin \alpha \\
 \dot{b} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta (a + KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \\
 &\quad - \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta (a + 2KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \varepsilon^2 KC^{-2}r_0^{-2} M_3^0 \sin \theta \cos \alpha \\
 \dot{\delta} &= \varepsilon C^{-1}M_3^0, \quad M_i^0(a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau) \equiv M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \phi, \tau), \quad (i=1, 2, 3) \quad (5) \\
 \dot{\psi} &= \varepsilon \operatorname{cosec} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} - \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \\
 \dot{\theta} &= \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \quad \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r_0 + \varepsilon(C - A)A^{-1} \delta \\
 \dot{\alpha} &= CA^{-1}r_0 + \varepsilon CA^{-1} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta + \\
 &\quad + \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta
 \end{aligned}$$

**Результаты исследования.** Исследуем задачу о приведении волчка в состояние регулярной прецессии, в частности, в «спящее состояние». Малые управляющие моменты в этом случае примут вид:

$$M_1 = \frac{-\varepsilon^2 h(\tau) \tilde{p}}{(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{1/2}}, \quad M_2 = \frac{-\varepsilon^2 h(\tau) \tilde{q}}{(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{1/2}}, \quad M_3 = \varepsilon^2 u(\tau), \quad (6)$$

$$\tilde{p} = P - KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \sin \varphi, \quad \tilde{q} = Q - KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \cos \varphi.$$

Здесь  $h(t)$ ,  $u(t)$  – непрерывные функции,  $h(\tau) > 0$ . Данные законы управления отвечают оптимальному по быстродействию гашению экваториальной составляющей вектора угловой скорости вращения [4]. Запишем возмущающие моменты (6) с учетом соотношений (4):

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a \cos \gamma + b \sin \gamma}{(a^2 + b^2)^{1/2}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a \sin \gamma - b \cos \gamma}{(a^2 + b^2)^{1/2}}, \\
 M_3 &= \varepsilon^2 u(\tau).
 \end{aligned} \quad (7)$$

Подставим в систему (5) выражения (7) для возмущающего момента:

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= -\varepsilon A^{-1}h(\tau)a(a^2 + b^2)^{-1/2} - \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta (b - KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \\
 &\quad + \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta (b - 2KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \varepsilon^2 KC^{-2}r_0^{-2} u(\tau) \sin \theta \sin \alpha \\
 \dot{b} &= -\varepsilon A^{-1}h(\tau)b(a^2 + b^2)^{-1/2} + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta (a + KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \\
 &\quad - \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta (a + 2KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \varepsilon^2 KC^{-2}r_0^{-2} u(\tau) \sin \theta \cos \alpha \quad (8) \\
 \dot{\delta} &= -\varepsilon C^{-1}u(\tau), \quad \dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha) \\
 \dot{\psi} &= \varepsilon \operatorname{cosec} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} - \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \\
 \dot{\alpha} &= CA^{-1}r_0 + \varepsilon CA^{-1} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta + \\
 &\quad + \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta, \quad \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r_0 + \varepsilon(C - A)A^{-1} \delta
 \end{aligned}$$

Система (8) проинтегрированы численно при начальных условиях



$a_0 = 11,96$ ;  $b_0 = -7,96$ ;  $r_0 = \sqrt{3}$ ;  $\psi_0 = \frac{\pi}{3}$ ;  $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ ;  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ ;  $\gamma_0 = 0$  и параметрах задачи  $A = 1,2$ ;  $C = 1$ ;  $K = 10$ . Рассмотрен случай, когда  $h(\tau)$ ,  $u(\tau)$  имеют вид:

$$h(\tau) = h_0 + h_1 \exp(\tau), \quad u(\tau) = u_0 + u_1 \exp(\tau), \quad \{h_0, h_1, u_0, u_1\} = \text{const} \quad (9)$$

Численный расчет проведен при различных значениях  $h_0, h_1, u_0, u_1$ , а также при  $\varepsilon \in [0, \dots, 10^{-4}]$ . На рис. 1–3 изображены графики решений при  $h_0 = 1$ ;  $u_0 = 1,25$ ;  $h_1 = u_1 = 0,1$  и  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

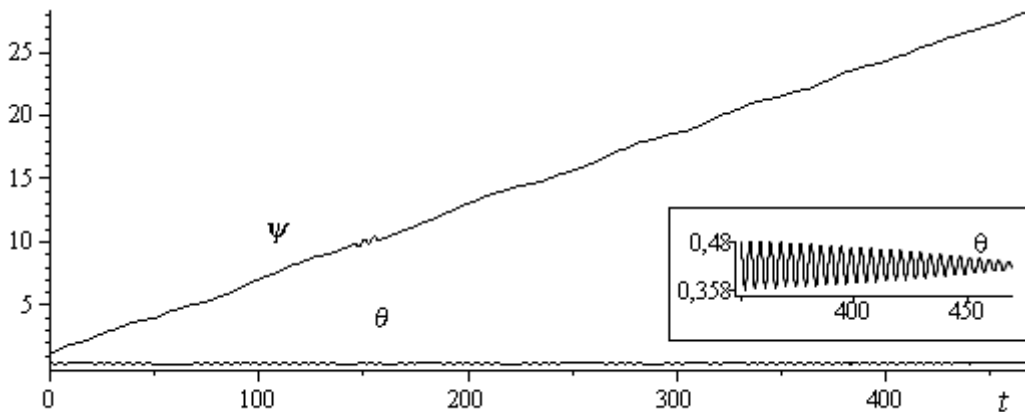


Рис. 1. Графики функций  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$ .

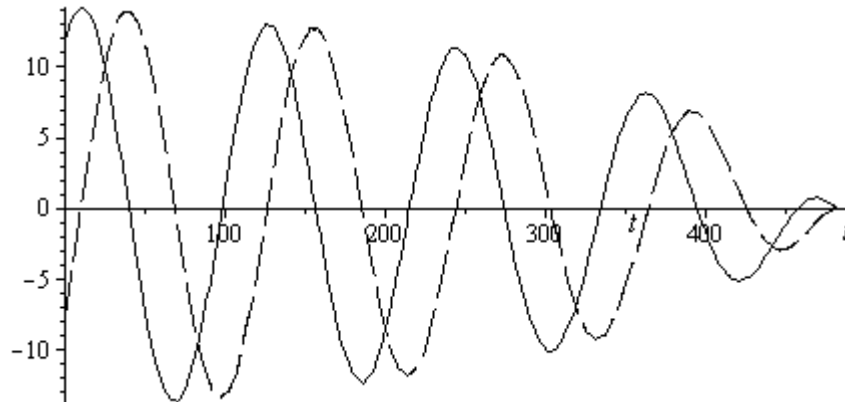


Рис. 2. Графики функций  $a(t)$ ,  $b(t)$ .

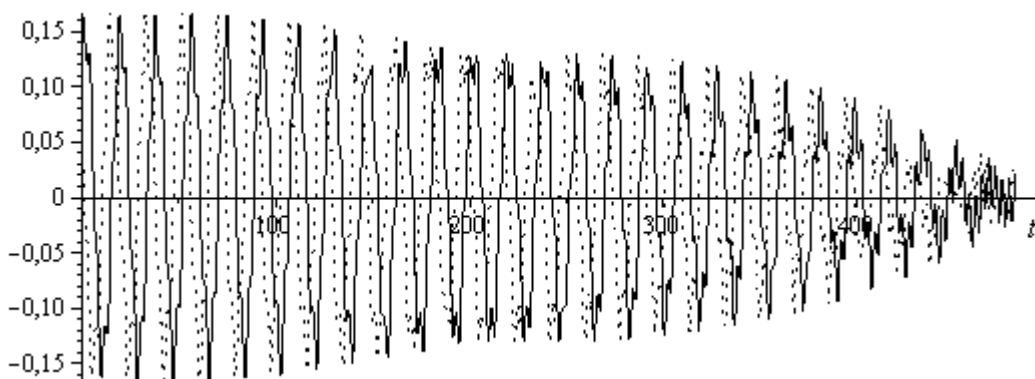


Рис. 3. Графики функций  $p(t)$ ,  $q(t)$ .



Угол прецессии медленно возрастает (рис.1). Пределы изменения угла нутации очень малы, и со временем график функции представлен в виде прямой линии  $\theta \approx 0,42$  (рис.1). На рис. 2 изображены графики функций  $a(t)$  и  $b(t)$ . Амплитуда колебаний переменных  $a$  и  $b$  достигает наибольшего значения на промежутке  $[0;100]$ , с возрастанием времени колебания затухают.

Графики изменения проекций  $p, q$  вектора угловой скорости представлены на рис. 3. Они получены в результате подстановки в выражения (4) и (3) значения переменных  $a, b, \delta, r, \theta, \alpha, \gamma$ . Характер изменений  $p, q$  можно интерпретировать как колебания с убывающей амплитудой. Значения  $p, q$  осциллируют в пределах от  $-0,165$  до  $0,165$  и медленно затухают.

Корректность вычислений, подтверждалась совпадением значений для  $r$ , полученными в результате подстановки в (4) значений  $\delta$  из численного интегрирования системы (8) и точным решением

$$r(t) = r_0 + \varepsilon^2 C^{-1} \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Проекция  $r$  вектора угловой скорости на ось динамической симметрии при указанных начальных условиях и параметрах задачи возрастает.

**Заключение и выводы.** Исследовано движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с учетом нестационарного возмущающего момента. Рассмотрена механическая модель, отвечающая случаю гашения экваториальной составляющей вектора угловой скорости вращения посредством ограниченного момента сил, при определенных параметрах и начальных условиях. Построены графики изменений углов прецессии и нутации, а также проекций вектора угловой скорости, полученные в результате численного интегрирования. Проведен анализ полученных решений.

#### Литература

1. Лещенко Д. Д., Шамаев А. С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – №6. – С.8–17.
2. Chernousko, F.L. Akulenko, L.D. and Leshchenko, D.D.(2017) *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*, Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-53928-7
3. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T. and Timoshenko I. Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments // *Multibody System Dynamics*. – 2001. – V.6, №1. – pp. 3–16.
4. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления.– М.: Наука, 1987. – 368 с.

#### References

1. Leshchenko, D.D. and Shamaev, A.S., (1987) “Perturbed rotational motions of a rigid body that are close to regular precession in the Lagrange case”, *Mechanics of Rigid Body*, Vol. 22, no. 6, pp. 8–17.



2. Chernousko, F.L. Akulenko, L.D. and Leshchenko, D.D. (2017) *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*, Springer, Cham, 241p. DOI: 10.1007/978-3-319-53928-7

3. Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D., Kushpil, T. A., and Timoshenko, I. A. (2001) “Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments”, *Multibody System Dynamics*, Vol. 6, no. 1, pp. 3–16.

4. Akulenko, L.D., (1987), *Asimptoticheskiye metody optimal'nogo upravleniya* [Asymptotic optimal control methods], Nauka, Moscow, Russia, 368 p.

**Abstract.** *Rotational motions of a symmetric rigid body around a fixed point are studied under the influence of an unsteady perturbing moment of forces. It is assumed that the body is spinning rapidly, and the disturbing moments are small compared with the restoring ones. To solve the system of differential equations, numerical integration is used. As an example, we consider a mechanical model corresponding to the problem of bringing a top to a state of regular precession.*

**Key words:** *Lagrange case, restoring and perturbation torques, nutation angle.*

Статья отправлена: 25.03.2020 г.  
© Козаченко Т.А., Козаченко К.А.