



УДК 535.417

**INTERFERENCE OF COHERENT ELECTROMAGNETIC WAVES WITH
DIFFERENT NATURE OF POLARIZATION
ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С
РАЗЛИЧНЫМ ХАРАКТЕРОМ ПОЛЯРИЗАЦИИ**

Lomakina O.V./ Ломакина О.В.

к.п.н., доц. / c.t.s., as.prof.

Gridnev A.B./ Гриднев А.Б.

*магистрант / undergraduate**Tambov State Technical University, Russia, ul. Michurinskaya, 112**Тамбовский государственный технический университет, Россия, ул. Мичуринская, 112*

Аннотация: Рассматривается взаимодействие двух когерентных волн, одна из которых обладает линейной, а другая - эллиптической или круговой поляризацией. Дается теория сложения двух когерентных волн с различным характером поляризации, а также теория их интерференции при наличии анализатора. Полученные выводы подтверждаются экспериментом в диапазоне СВЧ. Наблюдаются интерференционные картины при различных условиях и полярные диаграммы результирующих волн в различных точках волнового интерференционного поля.

Ключевые слова и фразы: волны, поляризация волн, когерентность, сложение, интерференция.

Вступление.

В научной и учебной литературе по волновой оптике [1-3] данная проблема не рассматривается, хотя она представляет не только чисто методический, но и научный интерес, тем более, что теоретические выводы могут быть подтверждены экспериментально в сантиметровом диапазоне волн ($\lambda = 3,2$ см).

Под сложением двух когерентных волн с различным характером поляризации будем понимать исключение из канонических уравнений волн времени и нахождение траектории движения конца электрического вектора в плоскости, перпендикулярной направлению движения волн. По виду этой траектории можно судить о поляризации результирующей волны. Под интерференцией волн с различным характером поляризации (линейной и эллиптической) будем понимать наложение параллельных составляющих этих волн, проходящих через анализатор, установленный на их пути. Результат интерференции определяется зависимостью результирующей интенсивности волны, проходящей через анализатор, от разности фаз двух когерентных волн, приходящих в точку наблюдения. Зависимость интенсивности результирующей волны, выходящей из анализатора, от угла его поворота определяет так называемую полярную диаграмму волны, полученной от сложения волн с различным характером поляризации: линейной и эллиптической. Полярная диаграмма также определяет поляризацию результирующей волны.

Основной текст.

В целях конкретизации теории рассмотрим экспериментальную установку для исследования интерференции в диапазоне СВЧ, выполненную по схеме Т.Юнга (рис.1). Между источником радиоволн 1 и приемной антенной 2



установлен металлический экран 3 с двумя щелями шириной 40 мм каждая. Для получения волны с эллиптической или круговой поляризацией одна из щелей перекрывается анизотропной металленточной «пластинкой $\frac{\lambda}{4}$ » [4]. Главная ось P анизотропной пластинки располагается параллельно горизонтальной оси x. Источник и приемник радиоволн рассматриваются как поляризатор и анализатор соответствующего оптического прибора и они могут вращаться вокруг своих продольных осей. Для сканирования волнового интерференционного поля приемник может дополнительно перемещаться по окружности с центром на щелях. Положение приемника в пространстве определяется углом θ .

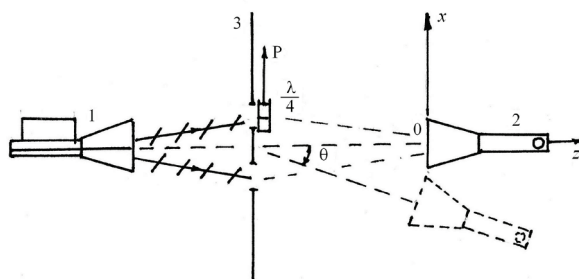


Рис. 1. Экспериментальная установка для исследования интерференции волн в диапазоне СВЧ

1. Теория сложения когерентных волн с линейной и эллиптической поляризациями.

Пусть электрический вектор \vec{E} волны, падающей на щели, составляет с осью x произвольный угол α . На рис.2 ОП – линия поляризатора. Волна, проходящая открытую щель, остается линейно поляризованной с прежней ориентацией вектора \vec{E} . Линейно поляризованная волна, падающая на щель, перекрытую анизотропной «пластинкой $\frac{\lambda}{4}$ », распадается в ней на две волны: обыкновенную и необыкновенную \vec{E}_e с ортогональными линиями поляризации. При этом амплитуды этих взаимно перпендикулярных компонент определяются выражениями:

$$E_0 = E \sin \alpha; \quad E_e = E \cos \alpha. \quad (1)$$

Так как при выходе из четвертьволновой пластинки обыкновенная и необыкновенная волны имеют разность фаз $\frac{\pi}{2}$, то результирующая волна при произвольном α имеет эллиптическую, а при $\alpha = 45^\circ$ - круговую поляризацию.

Пусть от открытой щели в произвольную точку расположения приемной антенны приходит волна, описываемая уравнением:

$$\xi = E \cos \omega t. \quad (2)$$

Разложим вектор \vec{E} линейно поляризованной волны в точке наблюдения на две составляющие по осям x и y, амплитуды которых могут быть записаны в виде:

$$E_{mx} = E \cos \alpha; \quad E_{my} = E \sin \alpha. \quad (3)$$

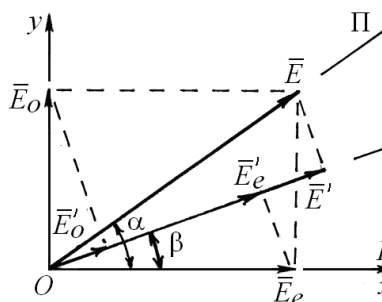


Рис. 2 Пространственная диаграмма электрических векторов взаимодействующих волн

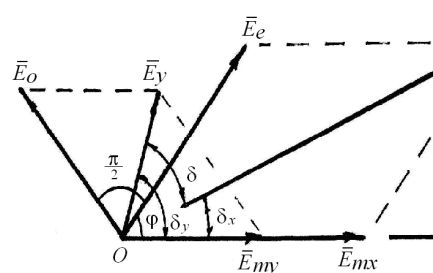


Рис. 3 Векторная диаграмма сложения волн

Канонические уравнения для линейно поляризованной волны в точке наблюдения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\xi_x &= E_{mx} \cos \omega t = E \cos \alpha \cdot \cos \omega t; \\ \xi_y &= E_{my} \cos \omega t = E \sin \alpha \cdot \cos \omega t.\end{aligned}\quad (4)$$

От щели, перекрытой четвертьволновой пластинкой, в точку наблюдения приходит волна с эллиптической поляризацией, каноническое уравнение которой может быть записано в виде:

$$\xi_e = E_e \cos(\omega t + \varphi); \quad \xi_0 = E_0 \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (5)$$

где φ - разность фаз между волнами, приходящими от различных щелей в точку наблюдения, которая определяется их геометрической разностью хода $\Delta = d \sin \theta$, где d - расстояние между центрами щелей: $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin \theta$. Для определения характера поляризации результирующей волны в точке наблюдения осуществим сложение четырех уравнений (4 – 5), построив векторную диаграмму (рис.3), где учтено, что согласно формулам (1) и (3) $E_{mx} = E_e$; $E_{my} = E_0$. Сложив векторы \bar{E}_{mx} и \bar{E}_e , найдем результирующую амплитуду волны, электрический вектор которой совершает колебания по оси x :

$$E_x^2 = E_{mx}^2 + E_e^2 + 2E_{mx}E_e \cos \varphi \text{ или } E_x^2 = 2E_{mx}^2(1 + \cos \varphi). \quad (6)$$

Начальная фаза δ_x приведенной результирующей волны по оси x также можно найти из векторной диаграммы:

$$\operatorname{tg} \delta_x = \frac{E_{mx} \sin \varphi}{E_{mx} + E_{mx} \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (7)$$

Аналогично, сложив векторы \bar{E}_{my} и \bar{E}_0 , найдем амплитуду E_y и фазу δ_y результирующей приведенной волны по оси y :

$$E_y^2 = 2E_{my}^2 \left[1 + \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right]; \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \delta_y = \frac{E_{my} \sin \left[180^\circ - \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{E_{my} - E_{my} \cos \left[180^\circ - \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right]} = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (9)$$



Следовательно, уравнения приведенных результирующих колебаний по осям x и y в точке наблюдения имеют вид:

$$\xi_{px} = E_x \cos(\omega t + \delta_x); \quad \xi_{py} = E_x \cos(\omega t + \delta_y). \quad (10)$$

Исключив из этих уравнений время t , получим неканоническое уравнение эллипса, которое в краткой форме имеет вид:

$$\frac{\xi_{px}^2}{E_x^2} - 2\frac{\xi_{px}\xi_{py}}{E_x E_y} \cos \delta + \frac{\xi_{py}^2}{E_y^2} = \sin^2 \delta, \quad (11)$$

где

$$\delta = \delta_y - \delta_x \quad (12)$$

есть разность фаз между результирующими колебаниями по осям x и y . Таким образом, в результате сложения двух когерентных волн с различным характером поляризации образуется результирующая волна, обладающая эллиптической поляризацией.

2. Сложение линейно поляризованной волны и волны с круговой поляризацией.

Для этого достаточно в изложенной теории положить $\alpha = 45^\circ$.

1. При разности фаз взаимодействующих волн $\varphi = 0$ на основании формул (3; 6; 8) найдем амплитуды результирующих волн по осям x и y : $E_x = \sqrt{2}E$, $E_y = E$, а также с учетом формул (7, 9) разность фаз между ними: $\delta = \delta_x - \delta_y = 45^\circ$. Подставляя полученные результаты в формулу (11), найдем неканоническое уравнение эллипса:

$$\xi_{px}^2 - 2\xi_{px}\xi_{py} + 2\xi_{py}^2 = E^2. \quad (13)$$

Следовательно, в результате сложения волн с линейной и круговой поляризациями в центре волнового поля образуется результирующая волна с эллиптической поляризацией (рис.4 а).

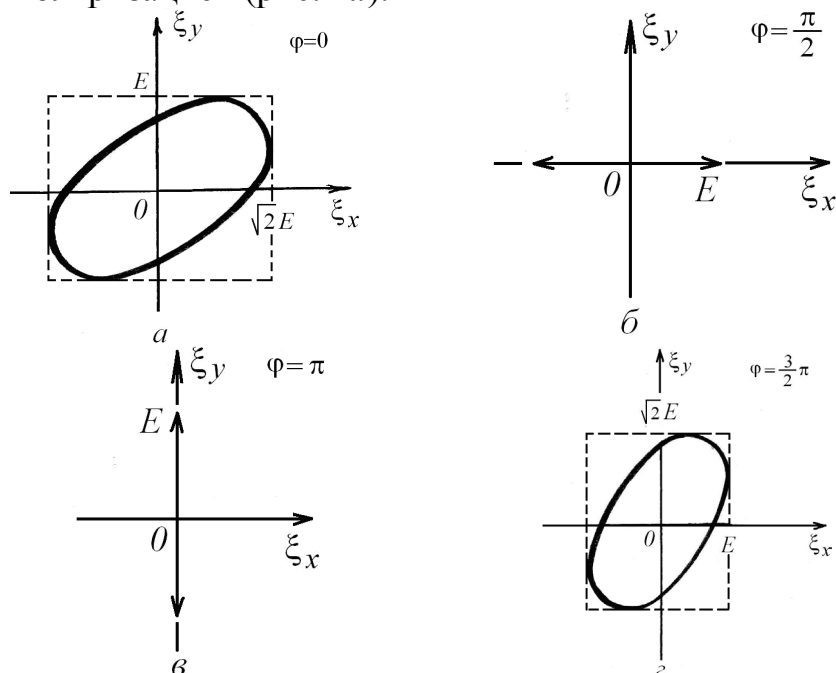


Рис. 4 Характер поляризации результирующих волн

2. При разности фаз $\varphi = 90^\circ$ аналогично найдем $E_x = E$; $E_y = 0$. Следовательно,



в данной точке волнового фронта результирующая волна обладает линейной поляризацией, причем направления колебаний электрического вектора E совпадают с осью x (рис. 4б).

3. При разности фаз $\varphi = 180^\circ$ найдем $E_x = 0$; $E_y = E$ и результирующая волна обладает линейной поляризацией (рис. 4в).

4. При разности фаз $\varphi = 270^\circ$ найдем $E_x = E$; $E_y = \sqrt{2}E$; $\delta = 135^\circ$ и, следовательно, результирующая волна обладает эллиптической поляризацией (рис. 4г):

$$2\xi_{px}^2 - 2\xi_{px}\xi_{py} + \xi_{py}^2 = E^2. \quad (14)$$

Расчеты показывают, что при других разностях фаз взаимодействующих волн их сложение приводит к результирующей волне с эллиптической поляризацией. Результирующая волна с круговой поляризацией получиться не может.

3. Теория интерференции двух когерентных волн с различным характером поляризации.

Для наблюдения интерференции рассматриваемых волн необходимо на их пути установить анализатор, главная линия ОА которого составляет с главной осью «пластинки $\frac{\lambda}{4}$ », то есть с осью x , произвольный угол β (рис.2). В этом случае анализатор пропускает три параллельные компоненты: E' ; E'_o ; E'_e , которые являются составляющими векторов \bar{E} , \bar{E}_o , \bar{E}_e волн, выходящих из щелей. Сложение этих однонаправленных колебаний обеспечивает интерференцию волн с различным характером поляризации. Амплитуды трех интерферирующих компонент могут быть найдены из пространственной диаграммы рис. 2:

$$E' = E \cos(\alpha - \beta); \quad E'_e = E_e \cos \beta; \quad E'_o = E_o \sin \beta.$$

При учете формул (1) получим

$$E' = E \cos(\alpha - \beta); \quad E'_e = E \cos \alpha \cdot \cos \beta; \quad E'_o = E \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (15)$$

Учитывая фазовые соотношения интерферирующих волн в точке наблюдения, уравнения колебаний трех интерферирующих компонент могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \xi' &= E' \cos \omega t = E \cos(\alpha - \beta) \cos \omega t; \\ \xi'_e &= E'_e \cos(\omega t + \varphi) = E \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\omega t + \varphi); \\ \xi'_o &= E'_o \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = E \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \quad (16)$$

Для нахождения амплитуды E_p результирующей волны при интерференции трех указанных компонент на основании выражений (16) построим векторную диаграмму (рис. 5). Произведем сложение векторов \bar{E}_o и \bar{E}'_e , т. е. $\bar{E}'_o + \bar{E}'_e = \bar{E}''$. При этом модуль вектора \bar{E}'' равен $E'' = \sqrt{E_o'^2 + E_e'^2}$. Или при учете формул (15) найдем амплитуду этой приведенной волны:

$$E'' = E \sqrt{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}. \quad (17)$$

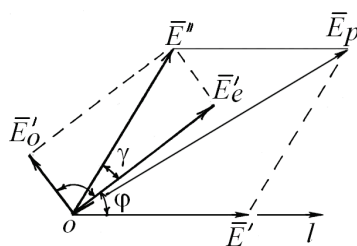


Рис.5 Векторная диаграмма интерференции волн

Из векторной диаграммы найдем также фазовый угол γ .

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{E_0'}{E_e} = \frac{E \sin \alpha \cdot \sin \beta}{E \cos \alpha \cdot \cos \beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta. \quad (18)$$

Производя сложение векторов \vec{E}' и \vec{E}'' , найдем амплитуду E_p , а следовательно, и интенсивность I результирующей волны при интерференции волн с различным характером поляризации:

$$I = E_p^2 = E'^2 + E''^2 + 2E'E'' \cos(\varphi + \gamma), \quad (19)$$

или

$$I = E_p^2 = (E' + E'')^2 - 4E'E'' \sin^2 \frac{\varphi + \gamma}{2}. \quad (20)$$

Подставляя в это выражение значения двух амплитуд \vec{E}' и \vec{E}'' приведенных интерферирующих волн согласно формулам (15) и (17), окончательно найдем:

$$I = E^2 \left\{ \left[\cos(\alpha - \beta) + \sqrt{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} \right]^2 - \left[-4 \cos(\alpha - \beta) \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} \cdot \sin^2 \frac{\varphi + \gamma}{2} \right] \right\}. \quad (21)$$

С одной стороны, данную формулу (21) следует рассматривать как результат интерференции двух когерентных волн, одна из которых линейно поляризована, а вторая - обладает эллиптической поляризацией. При этом положение интерференционных максимумов и минимумов зависит не только от разности фаз φ волн, но и от углов α и β , т.е. от ориентации главных осей поляризатора и анализатора в пространстве. С другой стороны, формула (21) определяет зависимость интенсивности I волны, проходящей через анализатор от угла β его поворота в данной точке наблюдения, характеризуемой постоянной разностью фаз интерферирующих волн ($\varphi = \text{const}$). Эта функциональная зависимость $I = I(\beta)$, выраженная в полярных координатах графически определяет так называемую *полярную диаграмму* результирующей волны, по которой можно судить о характере её поляризации.

4. Исследование явления интерференции двух волн, одна из которых линейно поляризована, а вторая имеет круговую поляризацию.

Для этого случая достаточно в полученных формулах перейти к $\alpha = 45^\circ$. Из формулы (18) найдем: $\gamma = \beta$. Тогда формула (21) примет вид:

$$I = I_0 \left\{ \left[\cos(45^\circ - \beta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^2 - \frac{4}{\sqrt{2}} \cos(45^\circ - \beta) \cdot \sin^2 \frac{\varphi + \beta}{2} \right\},$$



где $I_0 = E^2$ - интенсивность одной из волн, падающих на щели. Учитывая, что $\cos(45^\circ - \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \beta + \sin \beta)$, получим:

$$I = I_0 \left[\frac{1}{2}(\cos \beta + \sin \beta + 1)^2 - 2(\cos \beta + \sin \beta) \sin^2 \frac{\varphi + \beta}{2} \right]. \quad (22)$$

Рассмотрим частные случаи интерференции.

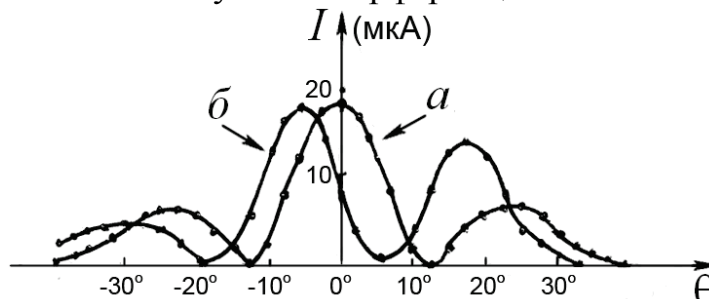


Рис.6 Экспериментальные интерференционные картины при различных ориентациях анализатора

1. Пусть главная линия анализатора составляет с горизонтальной осью x угол $\beta = 0^\circ$. Интерференционная картина согласно формуле (22) описывается формулой:

$$I = 2I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (23)$$

При $\varphi = 0$ в центре волнового фронта должен наблюдаться максимум интерференции с интенсивностью равной $2I_0$. На рис. 6а приведена экспериментальная интерференционная картина при $\beta = 0$, т. е. зависимость интенсивности принимаемой волны, измеряемой микроамперметром Ф-195, от угла поворота θ приемной антенны вокруг щелей. То, что боковые максимумы интерференции меньше центрального максимума, объясняется наличием дифракции Фраунгофера на щелях.

2. При $\beta = 90^\circ$ интерференционная картина описывается уравнением:

$$I = 2I_0 \cos^2 \frac{\varphi + 90^\circ}{2}. \quad (24)$$

Соответствующая экспериментальная интерференционная картина показана на рис. 6б. Легко видеть, что при повороте анализатора на угол 90° интерференционная картина сдвигается по фазе на $\frac{\pi}{2}$, т. е. интерференционные картины не становятся дополнительными.

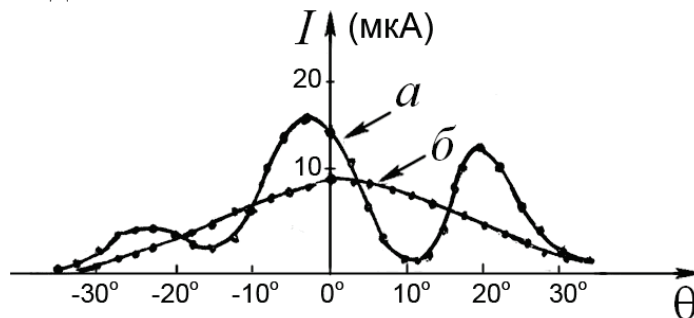


Рис.7 Интерференционная картина – а и её отсутствие – б.



3. При $\beta = 45^0$ интерференционная картина описывается уравнением

$$I = I_0 \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi + 45^0}{2} \right). \quad (25)$$

Соответствующая экспериментальная интерференционная картина приведена на рис.7а. Главный максимум смещен незначительно от центра волнового поля.

4. При $\beta = 135^0$ интерференционная картина отсутствует, т. е. интенсивность принимаемой волны во всех точках пространства сохраняется постоянной:

$$I = \frac{1}{2} I_0. \quad (26)$$

Объясняется это тем, что при $\beta = 135^0$ главная линия анализатора оказывается перпендикулярной электрическому вектору E линейно поляризованной волны, выходящей из открытой щели. Анализатор пропускает только волну с круговой поляризацией. На рис. 7б показано экспериментальное распределение интенсивности по волновому фронту при указанных условиях. По сути дела наблюдается главный максимум дифракции Фраунгофера на щели, перекрытой четверть волновой пластинкой.

5. Анализ поляризации результирующей волны, полученной от сложения волн с различным характером поляризации.

Формулу (22), описывающую интерференцию данных волн, можно рассматривать как зависимость интенсивности I волны, проходящей через анализатор, от угла β его поворота в данной точке наблюдения, которая характеризуется постоянной разностью фаз $\varphi = const$. Данная математическая зависимость $I = I(\beta)$, выраженная графически в полярных координатах, называется *полярной диаграммой результирующей волны* в точке наблюдения, по которой можно судить о характере поляризации. По формуле (22) рассчитаем теоретические полярные диаграммы в различных точках волнового фронта, то есть при различных значениях $\varphi = const$.

1. В центре волнового фронта при $\varphi = 0$ полярная диаграмма согласно расчета по формуле (22) имеет вид, изображенный на рис.8а. Следовательно, результирующая волна обладает эллиптической поляризацией. Это подтверждается экспериментально в диапазоне СВЧ вращением приемной рупорной антенны вокруг своей продольной оси, когда она расположена в центре волнового фронта при $\theta = 0$.

2. При разности фаз $\varphi = 90^0$ согласно теории результирующая волна обладает линейной поляризацией (рис.8б), что так же подтверждается опытным путем при $\theta = 6^0$. Линия поляризации совпадает с осью x . При небольшом увеличении разности фаз результирующая волна становится эллиптически поляризованной.

3. При разности фаз $\varphi = 180^0$ результирующая волна снова становится линейно поляризованной (рис.8в). Линия поляризации волны этой волны совпадает с осью y . Она наблюдается, когда приемная антенна находится под углом $\theta = 12^0$.

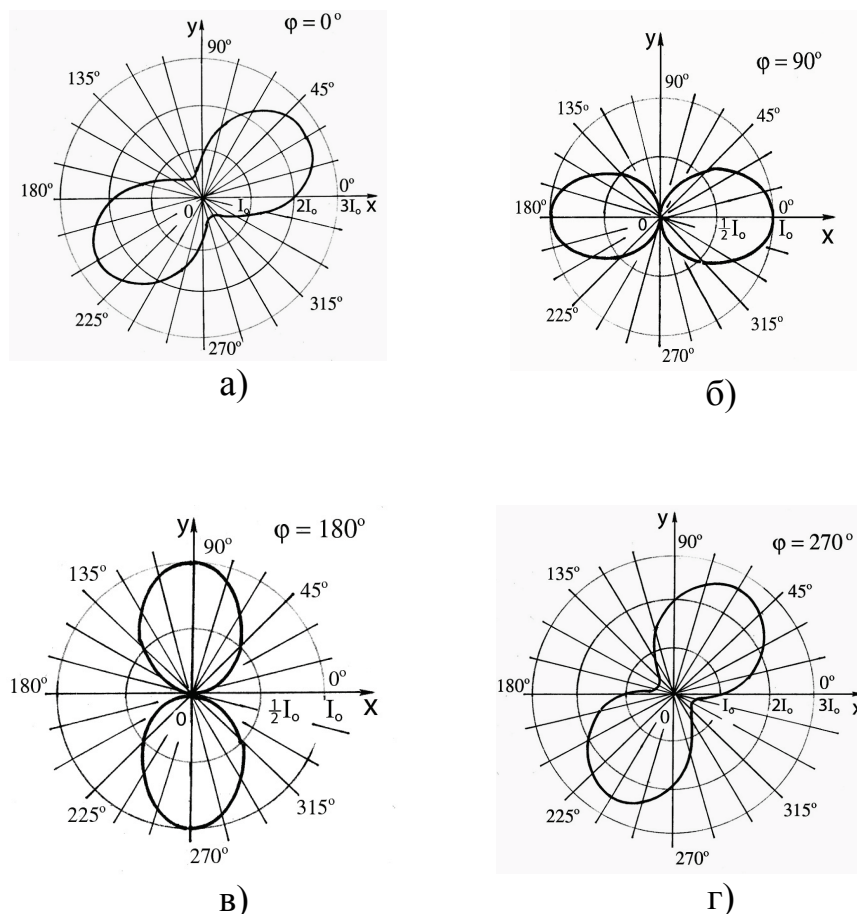


Рис.8 Полярные диаграммы результирующих волн

4. При разности фаз $\varphi = 270^0$ результирующая волна снова становится эллиптически поляризованной (рис.8г). Положение приемной антенны при этом определяется углом $\theta = 18^0$.

Полученные полярные диаграммы (рис.8) целесообразно сравнить с результатами сложения линейно поляризованной волны и волны с круговой поляризацией (рис.4). По полярным диаграммам можно определить отношение полуосей соответствующих эллипсов: $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_{\min}}}$ и сравнить полученные результаты с полуосями теоретических эллипсов.

Заключение и выводы

1. Рассмотрена теория сложения двух когерентных волн, обладающих линейной и эллиптической поляризациями. В частном случае показано, что сложение линейно поляризованной волны и волны с круговой поляризацией приводит к образованию эллиптически поляризованной волны, которая при определенной разности фаз может вырождаться в волну с линейной поляризацией.

2. Приводится теория интерференции двух волн с линейной и эллиптической поляризациями при наличии анализатора, установленного на их пути. Рассчитаны теоретические интерференционные картины при взаимодействии волн с линейной и круговой поляризацией, которые подтверждаются экспериментально в диапазоне СВЧ.



3. Рассчитаны полярные диаграммы результирующих волн, которые образуются при сложении волн с линейной и круговой поляризациями. Теоретические полярные диаграммы также согласуются с экспериментом в диапазоне СВЧ. Проводится некоторое соответствие между сложением и результатами интерференции волн с различным характером поляризации.

Литература:

1. Френель, О. Избранные труды по оптике / О. Френель. - М.: ГИТТЛ, 1955.- 604 с.
2. Борн, М. Основы оптики/ М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
3. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Оптика / Д.В. Сивухин. - М.: Наука, 1980. – 752 с.
4. Молотков, Н.Я. Учебные эксперименты по волновой оптике. СВЧ демонстрации / Н.Я. Молотков. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. -347 с.
5. Молотков, Н.Я. Колебательные процессы. Учебный эксперимент / Н.Я. Молотков. – Долгопрудный: Интеллект, 2013. – 286 с.
6. Молотков, Н.Я. Волновые электромагнитные процессы. Оптика и СВЧ / Н.Я. Молотков. - Palmarium Academic Publishing, 2015 г. - 538 с.

Abstract: Examines the interaction of two coherent waves, one of which has a linear and the other elliptical or circular polarization. Given the theory adding two coherent waves with different nature of polarization, as well as their interference theory in the presence of the Analyzer. The findings have been confirmed by experiment in microwave frequency range. There are interference pattern under different conditions and polar charts resulting waves in different points of a wave field.

Key words: electromagnetic waves; polarization; coherence; addition; interference.

References:

1. Fr. Fresnel Selected works on optics/A. Fresnel. -M.: GITTL, 1955.-604 p.
2. Bourne, M. Foundations of optics/ M. Born, E. Wolf. -M.: Nauka, 1970. -856 p.
3. Sivukhin, D.V. General Physics course. Optics/D.V. Sivukhin. -M: Nauka, 1980. -752 p.
4. Molotkov, N.Y. Educational experiments on wave optics. Microwave demonstration / N.Y. Molotkov. - Dolgoprudny: Intelligence, 2010. -347 p.
5. Molotkov, N.Y. Oscillatory processes. Educational experiment / N.Y. Molotkov. - Dolgoprudny: Intelligence, 2013. -286 p.
6. Molotkov, N.Y. Wave electromagnetic processes. Optics and microwave / N.Y. Molotkov. -Palmarium Academic Publishing, 2015-538 p.