DOI: 10.30888/2415-7538.2018-09-1-029

УДК 514.18

MODIFICATION OF MATHEMATICAL CURVES FOR LOCAL INFLUENCE ON THEIR FORM

МОДИФІКАЦІЯ ДЕЯКИХ МАТЕМАТИЧНИХ КРИВИХ ДЛЯ ГНУЧКОГО ВПЛИВУ НА ЇХ ФОРМУ

Bidnichenko O.G. / Бідніченко О.Г.
c.t.s., as.prof. / к.т.н., доц.
ORCID: 0000-0002-0548-3481
Belozyorova O.M. / Бєлозьорова О.М.
Admiral Makarov National University of shipbuilding, Mykolayiv, Heroiv Ukraine av. 9, 54025
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, Миколаїв, пр. Героїв України 9, 54025

Анотація. *Викладено способи модифікації кривої Безьє та параметричної кубічної кривої для можливості точного локального впливу на форму кривої,, що моделюється. Криву Безьє запропоновано модифікувати шляхом введення вагових коефіцієнтів вершин характеристичної ламаної. В статті розроблено математичну модель для побудови параметричних кубічних кривих з двома степенями свободи. Для цього реалізовано алгоритм визначення степенів свободи кривої α і β , подано аналіз впливу їх значень на форму параметричних кривих.*

Ключові слова: *модифікація, крива Безьє, ваговий коефіцієнт, характеристична ламана, параметрична кубічна крива, степені свободи, математична модель*

Вступ.

Геометричне моделювання складних форм сучасних технічних об'єктів у даний час є практично єдиним способом, який дозволяє поліпшити форму ліній та поверхонь, за рахунок використання при моделюванні математичних кривих ліній і поверхонь, які здатні змоделювати необхідний об'єкт враховуючи жорсткі технічні вимоги до нього. Однак інколи для покращення створеного профілю виникає потреба у локальному впливі для коригування форми змодельованої кривої, яке можна отримати модифікацією математичних кривих, що використовуються при геометричному моделюванні об'єкта. Розглянемо такий підхід на прикладі профілювання елементів проточних частин відцентрових компресорів. В залежності від функціональних і геометричних особливостей окремого елемента його моделювання повинно забезпечити без ударний вхід потоку до робочого колеса, плавну без турбулентну течію робочої речовини, формування безвідривного потоку, необхідні геометричні параметри горла поверхні тощо. Тому уявляє інтерес розглянути деякі методи модифікації математичних кривих, які дозволять покращити їх форму за рахунок локального впливу.

Основний текст.

При профілюванні меридіональних обводів робочих коліс відцентрових компресорів в роботі [1] використано метод Безьє, який дає змогу коригувати форму кривої шляхом зміни положення вершин характеристичної ламаної. Але в деяких випадках виникає потреба у додаткових локальних можливостях щодо впливу на характер проходження кривої. Варіант підвищення степені кривої Безьє є неможливим у зв'язку з відсутністю інформації для введення більшої кількості вершин ламаної лінії. Тому з метою забезпечення додаткових можливостей локального впливу на форму результуючої кривої автором пропонується ввести в рівняння кривої Безьє вагові коефіцієнти вершин характеристичної ламаної. Тоді рівняння кривої Безьє буде мати вигляд:

$$B\left(\overline{P},t\right)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k\cdot\overline{P}_k\cdot\Phi_{k,n}\left(t\right),\quad 0\le t\le 1, \tag{1}$$

де ω_k – ваговий коефіцієнт *k*-ої вершини; $\overline{P}_k$ – функція компонент векторів вершин ламаної; $\Phi_{k,n}$ – багаточлен Бернштейна; n – кількість вершин ламаної; t – параметр.

Ортогональні координати кривої при цьому визначаються параметричними співвідношеннями: $x\left(t\right)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k x_k\Phi_{k,n}\left(t\right);\quad y\left(t\right)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k y_k\Phi_{k,n}\left(t\right);$ (2)

де n – степінь апроксимуючого полінома, x_k, y_k, – координати вершин характеристичної ламаної.

При необхідності додаткового впливу на характер проходження результуючої кривої коефіцієнти ω_k повинні описувати функцію, що задовольняє таким умовам. При значенні параметра t=0 крива повинна пройти через першу точку меридіонального обводу та мати кут нахилу дотичної, який визначається конструктивним кутом Ψ_1. Тоді при $t_1=0$ значення $\omega_1=1$, а похідна $d\omega/dt=0$. Подібні вирази будуть і для кінцевої 5-ої точки, в якій $t_5=1$, $\omega_5=1$ та $d\omega/dt=0$. У проміжних точках 2, 3 та 4 функція ω приймає такі значення: при $t_2=1/4$ коефіцієнт $\omega=\omega_2$; при $t_3=2/4$ – $\omega=\omega_3$ та при $t_4=3/4$ – $\omega=\omega_4$. Можливі варіанти графіків функції $\omega=\omega(t)$ показано на рис. 1. Значення коефіцієнтів ω_2, ω_3 та ω_4 задаються з початковими даними та корегуються у процесі геометричного моделювання проточної частини компресора. Інформації відносно функціональної залежності достатньо, щоб отримати її у вигляді поліному 6-го степеня: $\omega = At^6+Bt^5+Ct^4+Dt^3+Et^2+Ft+G$. Невідомі коефіцієнти полінома A, B, C і т. д. визначаються виходячи із прийнятих умов побудови кривої. Так, при $t=0$ функція $\omega=\omega_1=1$, похідна $d\omega/dt=0$, тому $G=1$, а $F=0$. Такі ж самі граничні умови в кінцевій точці, де t=1, дозволять отримати два рівняння: $A+B+C+D+E=0$; $6A+5B+4C+3D+2E=0$. Решта рівнянь отримаємо використовуючи значення параметра t у вузлових точках та введеними ваговими коефіцієнтами ω_2, ω_3 та ω_4: $At_2^6+Bt_2^5+Ct_2^4+Dt_2^3+Et_2^2=\omega_2-1$; $At_3^6+Bt_3^5+Ct_3^4+Dt_3^3+Et_3^2=\omega_3-1$; $At_4^6+Bt_4^5+Ct4_4^4+Dt_4^3+Et_4^2=\omega_4-1$. Розв'язуючи отриману систему п'яти лінійних рівнянь знайдемо значення коефіцієнтів полінома, який додатково впливає на форму кривої Безьє. Викладений підхід до модифікації кривої Безьє впливає унімодально на її форму, оскільки функція ω в рівному степеню впливає на декартові координати точки. При необхідності можна модифікувати метод Безьє

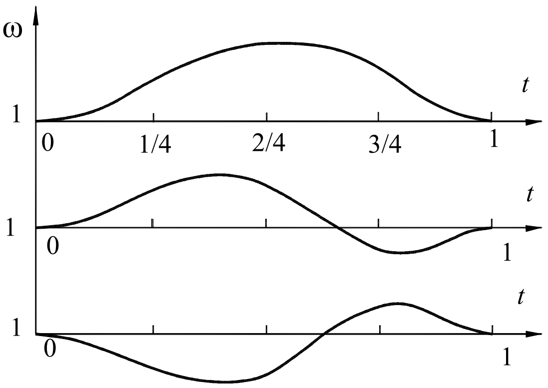

Рис.1. Можливі варіанти графіків функції ω= ω(t)

так, щоб по-різному впливати на координати *x* та *y* результуючої кривої.

Розглянемо приклад модифікації параметричної кубічної кривої, яка використовується для геометричного моделювання скелетної лінії профілю компресорної лопатки [2]. Параметричне представлення кривих дозволяє уникнути ускладнень, які виникають при описі замкнутих та багатозначних функцій. В якості граничних умов при задаванні параметричних кривих використовуються дотичні вектори, а не тангенси кутів нахилу, які використовуються у відомих розповсюджених методах, та можуть бути нескінченими. Параметрична кубічна крива є така крива, у якої координати *x* та *y* уявляють собою многочлени третього степеня відносно деякого параметру *t*.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ y(t) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1 \qquad (3)$$

Існують різні підходи до визначення коефіцієнтів a_i, b_i $(i = 0{,}3)$. У роботі [3] ці коефіцієнти розглядаються як лінійні функції параметру *t*. Це приводить до параметричних кубічних кривих з однією степеню свободи α, однак у деяких практичних випадках такого впливу на форму кривої буває недостатньо. Припустимо, що необхідно побудувати криву, яка є дотичною до векторів $\vec{V}_0$, $\vec{V}_1$ та проходить через деяку точку *A*, в якій задано кут нахилу дотичної γ_A (рис.2). При цих умовах параметрична кубічна крива повинна мати дві степені свободи, що обумовлює введення в рівняння додаткового параметру β. Крива починается в точці P_0 с координатами x_0, y_0,(*t=0*) та закінчується в точці P_1 з координатами x_1, y_1,(*t=1*). Дотична до кривої при *t=0* визначається вектором $\overrightarrow{P_0M} = \vec{V}_0$, а при *t=1* – вектором $\overrightarrow{P_1M} = \vec{V}_1$. Похідні в цих точках пропорційні одиничним дотичним векторам на кінцях кривої: $\left(\frac{d\bar{y}}{dx}\right)_0 = \alpha\vec{V}_0; -- \left(\frac{d\bar{y}}{dx}\right)_1 = \beta\vec{V}_1.$, де α та β – параметри, які можуть бути задані з початковими даними, або знайдені в процесі рішення конкретної задачі моделювання.

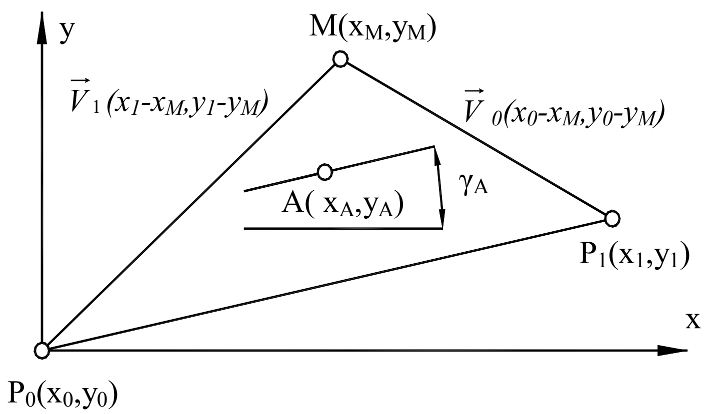

Рис. 2. Графічні умови побудови кривої

Використання рівнянь (3) та вказаних граничних умов дозволяє отримати рівняння параметричної кубічної кривої з двома степенями свободи:

$$x(t) = x_0 + \alpha(x_M - x_0)t + [3(x_1 - x_0) - 2\alpha(x_M - x_0) - \beta(x_1 - x_M)]t^2 + [x_M(\alpha - \beta) + x_1(\beta - 2) - x_0(\alpha - 2)]t^3; \qquad (4)$$

$$y(t) = y_0 + \alpha(y_M - y_0)t + [3(y_1 - y_0) - 2\alpha(y_M - y_0) - \beta(y_1 - y_M)]t^2 + [y_M(\alpha - \beta) + y_1(\beta - 2) - y_0(\alpha - 2)]t^3. \qquad (5)$$

Змінюючи значення параметрів α та β можливо отримати параметричну кубічну криву, що задовольняє тим чи іншим умовам моделювання. На рис. 3 приведені данні, що відображають вплив параметрів α та β на форму параметричної кривої (цифри на рисунку позначають значення параметру, що змінюється). При $\alpha = 0$ та $\beta = 0$ крива вироджується у пряму лінію, що може бути показано і математично. Для $\alpha \langle 0$ та $\beta \langle 0$ отримаємо родину кривих, що розташовані нижче цієї прямої, а для $\alpha \rangle 0$ та $\beta \rangle 0$ параметричні криві розташовуються вище вказаної прямої.

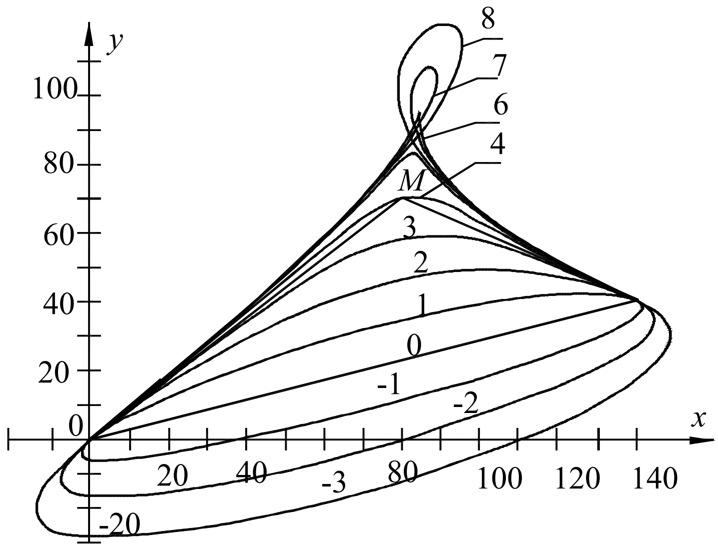

Рис. 3. Вплив параметрів α і β на форму параметричної кривої: α = β

На рис. 4 показано особливості змінення параметричної кривої для α=3

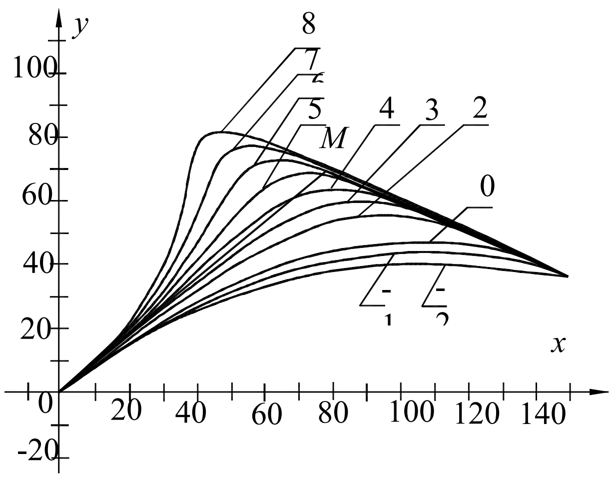

Рис.4.Варіанти параметричної кривої при α=3, β=var

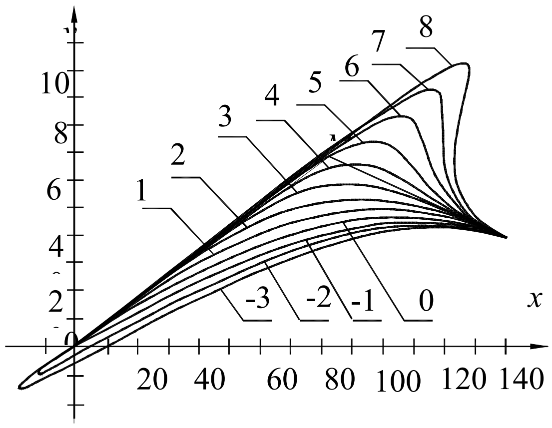

Рис. 5. Варіанти параметричної кривої при β =3, α =var

при варіюванні β від -2 до 8, рис. 5 демонструє варіанти параметричних кривих для α=3 при варіюванні β від -2 до 8. При збільшенні значень параметрів α та β родини кривих все більш витягуються та при визначених їх значеннях функція має точки перегину, а далі – точки повернення. Зі збільшенням параметрів α та β значення функції збільшуються при тих же самих початкових даних.

Для визначення параметрів α та β необхідно задати координати точки A та кут нахилу дотичної γ. Позначимо через t_A значення параметру t, яке задовольняє декартовим координатам точки $A(x_A, y_A)$. Записавши рівняння параметричної кубічної кривої (4) і (5) та тангенсу кута нахилу дотичної в точці A, розв'язавши чисельно отриману систему рівнянь в першому наближенні получимо вираз для визначення t_A:

$$t_A = \frac{b_2 - a_2 tg\gamma_A + \sqrt{(a_2 tg\gamma_A - b_2)^2 - 3(a_3 tg\gamma_A - b_3)(a_1 tg\gamma_A - b_1)}}{3(a_3 tg\gamma_A - b_3)}. \qquad (6)$$

Вирази для розрахунку параметрів α і β мають вигляд:

$$\alpha = \frac{\left[x_A - x_0 + (x_1 - x_0)t_A^2(2t_A - 3)\right](y_1 - y_M) - \left[y_A - y_0 + (y_1 - y_0)t_A^2(2t_A - 3)\right](x_1 - x_M)}{t_A(1 - t_A)^2\left[(x_M - x_0)(y_1 - y_M) - (y_M - y_0)(x_1 - x_M)\right]};$$

$$\beta = \frac{\left[x_A - x_0 + (x_1 - x_0)t_A^2(2t_A - 3)\right](y_M - y_0) - \left[y_A - y_0 + (y_1 - y_0)t_A^2(2t_A - 3)\right](x_M - x_0)}{t_A(1 - t_A)^2\left[(x_M - x_0)(y_1 - y_M) - (y_M - y_0)(x_1 - x_M)\right]}.$$

Визначивши параметри α і β першого наближення, за виразом (6) уточнюють значення t_A. Ітераційний процес продовжується до отримання величини t_A с заданою точністю.

Висновки та перспективи. Викладено підхід до модифікації кривої Безьє шляхом введення вагових коефіцієнтів вершин характеристичної ламаної для локального впливу на форму кривої, що моделюється. Показано варіанти функціональних залежностей вагових коефіцієнтів. Розроблено математичну модель для побудови параметричних кубічних кривих з двома степенями свободи, які дають можливість точного локального впливу на форму кривої. Для цього реалізовано алгоритм визначення степенів свободи кривої α і β , які впливають на форму кривої, що моделюється. Проаналізовано вплив степенів свободи на форму параметричних кривих. Розроблені алгоритми формування кривих можуть використовуватися для створення методик геометричного моделювання кривих або поверхонь, які задовольняють вибраним початковим даним, наприклад, для побудови скелетних ліній профілів компресорних лопаток або моделювання спинки профілю турбінної лопатки.

Литература:

1. Борисенко В.Д., Бидниченко Е.Г. Профилирование меридиональных обводов рабочих колес центробежных компрессоров с применением кривых Безье // Динамика, прочность и надежность судовых машин: Сб.нач.тр. №.3. – Николаев: НКИ, 1994. С. 92-99.

2. Борисенко В.Д., Бидниченко Е.Г. Параметрические кубические кривые с двумя степенями свободы// Енергетичне машинобудування: Зб. наук. праць №7 (355). – Миколаїв: УДМТУ, 1998. – С. 102-108.

3. Godwin A.N. The family of cubic spline with one degree of freedom. Proc Inst Mech Engrs Vol 125 34/78.

Abstract. *During geometric modeling of complex aerodynamic objects, in particular, the elements of the flowing parts of centrifugal compressors, sometimes it becomes necessary to have an additional local influence on the shape of the curve in order to obtain a profile completely satisfying the aerodynamic conditions and geometric parameters of the design. The authors propose ways of modifying the Bezier curve and the parametric cubic curve for the possibility of an exact local effect on the shape of the simulated curve. The Bezier curve is modified by introducing the weight coefficients of the vertices on the characteristic polyline. The variants of the graphs of the* *functional dependence of the weight coefficients are shown. An equation for the weight coefficients in the form of a polynomial of degree 6, whose coefficients are determined using the boundary conditions and the values of the parameters at the node points, is obtained. The paper presents a mathematical model for constructing a parametric cubic curve with two degrees of freedom, an algorithm for determining the degrees of freedom is implemented. The influence of the values of the degrees of freedom on the shape of the parametric cubic curves is analyzed.*

Key words: *modification, Bezier curve, weight coefficient, characteristic broken line, parametric cubic curve, degree of freedom, mathematical model*

References:

1. Borisenko V.D., Bidnichenko Ye.G. (1994). Profilirovaniye meridionalnyh obvodov rabochih kolyos tsentrobyezhnyh kompressorov s primeneniem krivyh Bezier [Profiling of meridian contours of impellers of centrifugal compressors using Bezier curves] in *Dinamika, prochnost i nadezhnost sudovyh mashin* [Dynamics, strength and reliability of ship machinery], iss 3, pp. 92-98/

2. Borisenko V.D., Bidnichenko Ye.G. (1998). Parametricheskiye kubicheskiye krivuye s dvumya stepenyamy svobody [Parametric cubic curves with two degrees of freedom] in *Energetychne mashinobuduvannya* [Power engineering machines], issue 7 (355), pp. 102-108.

3. Godwin A.N. The family of cubic spline with one degree of freedom. Proc Inst Mech Engrs Vol 125 34/78.

Статтю відправлено: 06.04.2018 г.