ЦИТ: ua217-033
DOI: 10.21893/2415-7538.2017-06-1-033
УДК 514

Бідніченко О.Г.

ДЕЯКІ СПОСОБИ УТВОРЕННЯ БАГАТОВИМІРНИХ ТІЛ

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, Миколаїв, пр. Героїв України, 9, 54025

Bidnichenko O.G.

SOME WAYS OF MULTIDIMENSIONAL OBJECTS FORMING

Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Heroiv Ukrainy av. 9, 54025

Анотація. В роботі розглядається кінематичний спосіб утворення багатовимірного куба та спосіб центрального проекціювання для утворення багатовимірного симплекса. Виведено формули складу отриманих багатовимірних об'єктів.

Ключові слова: багатовимірний куб, багатовимірний симплекс, кінематичний спосіб, центральне проекціювання, формули складу.

Abstract. This paper considers the kinematic method of formation of the multidimensional cube and the central projecting method for forming of multidimensional simplex. The multidimensional objects composition formula is *obtained.*

Key words: multidimensional cube, multidimensional simplex, kinematic method, central projecting, composition formula.

Вступ. Останнім часом в наукових дослідженнях все частіше використовуються методи нарисної геометрії багатовимірних просторів. Це обумовлено тим, що практичні задачі проблематично розв'язувати традиційними аналітичними методами оскільки кількість змінних величин, які відображають відповідні багатовимірні функціональні залежності, перевищує розмірність простору, в якому вони відбуваються. Крім того нарисна геометрія має можливість розглядати багатовимірні об'єкти як геометричні моделі багатьох змінних, що дає змогу наочно уявити такі процеси у вигляді геометричних моделей. Тому дана робота присвячується актуальному питанню утворення багатовимірних геометричних тіл та виведенню формул їх складу для подальшого використання при створенні геометричних моделей.

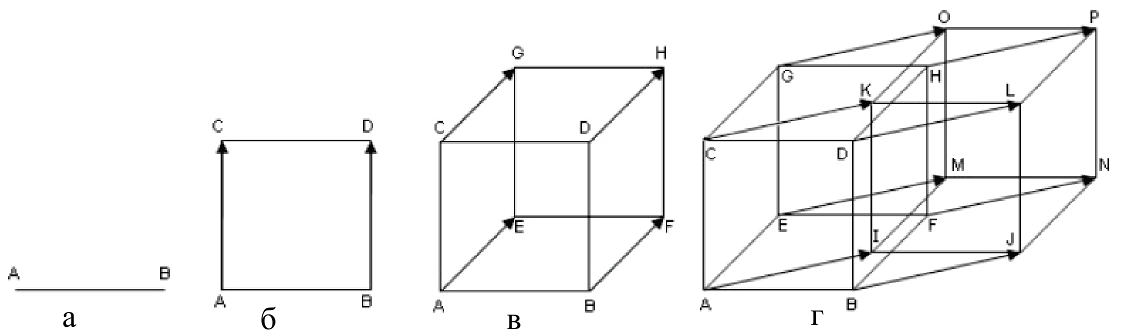

Рис.1 Формування n-вимірного кубу кінематичним способом

Основний текст. Для отримання багатовимірного кубу може бути використаним *кінематичний спосіб* [1], який полягає в переміщенні (n-1) вимірного геометричного образу вздовж прямої лінії (рис.1). Точка (0-мірний об'єкт) під час прямолінійного руху опише відрізок, тобто одновимірний образ (див.рис.1а). Відрізок при переміщенні вздовж прямої лінії опише прямокутник (або квадрат), тобто двовимірний образ (див.рис.1б). Двовимірний прямокутник при переміщенні утворює тривимірний куб (див.рис.1бв), який при переміщенні вздовж відрізка утворює чотиривимірний куб (див.рис.1г) і так далі.

Формули складу таких об'єктів: для відрізка лінії – $\overline{K}^1 = K^1 + 2\cdot K^0$, для квадрата – $\overline{K}^2 = K^2 + 4\cdot K^1 + 4\cdot K^0$, для кубу – $\overline{K}^3 = K^3 + 6\cdot K^2 + 12\cdot K^1 + 8\cdot K^0$.

Зробимо узагальнення: склад побудованого образу є добуток складу рухомого об'єкта на склад відрізка, який опише кожна точка рухомого геометричного об'єкта. Всі формули складу можуть бути представлені у такому вигляді: $\overline{K}^0 = \left(\overline{K}^1\right)^0 = K^0$; $\overline{K}^1 = \left(\overline{K}^1\right)^1 = K^1 + 2K^0$; $\overline{K}^2 = \left(\overline{K}^1\right)^2 = \left(K^1 + 2K^0\right)^2$, $\overline{K}^3 = \left(\overline{K}^1\right)^3 = \left(K^1 + 2K^0\right)^3$.

Проведемо аналогію для чотиривимірного простору. Візьмемо куб $\overline{K}^3$ та будемо переміщувати його поступово в напрямі, перпендикулярному до попередніх осей на відстань довжини сторони. Куб $\overline{K}^3$ утворить при цьому чотиривимірне тіло $\overline{K}^4$, яке називають чотиривимірним кубом або тессерактом. Тіло, отримане таким чином, зображено на рис.1г в звичній для нас паралельній проекції. Формула складу такого куба має такий вигляд: $\overline{K}^4 = \overline{K}^3 \cdot \overline{K}^1 = \left(\overline{K}^1\right)^3 \cdot \overline{K}^1 = \left(\overline{K}^1\right)^4 = \left(K^1 + 2\cdot K^0\right)^4$. Розкривши дужки отримаємо: $\overline{K}^4 = K^4 + 8\cdot K^3 + 24\cdot K^2 + 32\cdot K^1 + 16\cdot K^0$. Тобто чотиривимірний куб складається із відкритого куба, 8 відкритих тривимірних кубів, 24 відкритих граней, 32 відкритих ребер та 16 точок або вершин.

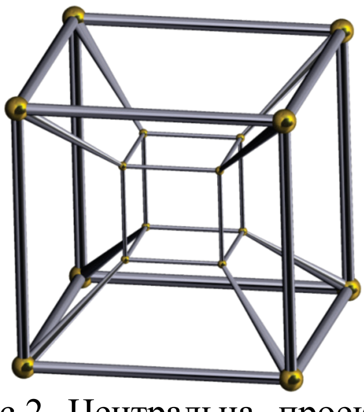

Рис.2 Центральна проекція чотиривимірного куба на його грань

Для іншого уявлення про чотиривимірний куб можна розглянути його *центральну проекцію.* Спостерігач знаходиться поза кубом та бачить проекцію куба на тривимірну грань (рис.2). Склад n-вимірного замкненого кубу буде обчислятися за формулою: $\overline{K}^n = \left(\overline{K}^1\right)^n = \left(K^1 + 2\cdot K^0\right)^n$. Якщо розкрити дужки та виконати необхідні перетворення, то отримаємо: $\overline{K}^n = K^n + 2\cdot C_n^1 K^{n-1} + 2^n C_n^2 K^{n-2} + ... + 2^{n-2} C_n^{n-2} K^2 + 2^{n-1} C_n^{n-1} K^1 + 2^n K^0$.

Уявляє інтерес розглянути метод *центрального проекціювання* не тільки для наочного уявлення кубу, а і для утворення багатовимірних об'єктів інших конфігурацій. Візьмемо довільну точку простору A_1, яку будемо вважати нульвимірним симплексом $\overline{T}^0$. Візьмемо іншу довільну точку A_2 (центр проекцій), з'єднаємо їх та отримаємо відрізок, який є одномірним симплексом $\overline{T}^1$ (рис.3а,б). Формула складу для точки є точка T^0. Відрізок складається із відкритого відрізка та двох його кінцевих точок: $\overline{T}^1 = T^1 + 2T^0$.

Візьмемо третю точку A_3, яка не належить цьому відрізку (центр проекціювання). З'єднаємо кожну точку відрізка з обраною точкою. Отримаємо трикутний відсік площини – двовимірний симплекс $\overline{T}^2$ (рис.3в). Формула складу виводиться із таких міркувань. Маємо вершину A_3, сукупність відкритих відрізків PA_3, до яких додано вершину P. Склад такого напіввідкритого відрізка виразиться T^1+T^0. Для утворення двовимірного симплекса цей відрізок обертається навколо центра проекцій точки A_3, а точка P переміщується вздовж відрізка A_1A_2 зі складом $\overline{T}^1 = T^1 + 2T^0$. Тому двовимірний симплекс без вершини A_3 дорівнює добутку симплекса $\overline{T}^1$ на напіввідкритий симплекс PA_3. Приєднавши точку A_3 (симплекс $\overline{T}^0$) отримаємо формулу складу замкненого двовимірного симплексу $\overline{T}^2$: $\overline{T}^2 = \overline{T^1}\left(T^1 + T^0\right) + T^0$. Підставивши значення та розкривши дужки остаточно отримаємо: $\overline{T}^2 = T^2 + 3T^1 + 3T^0$.

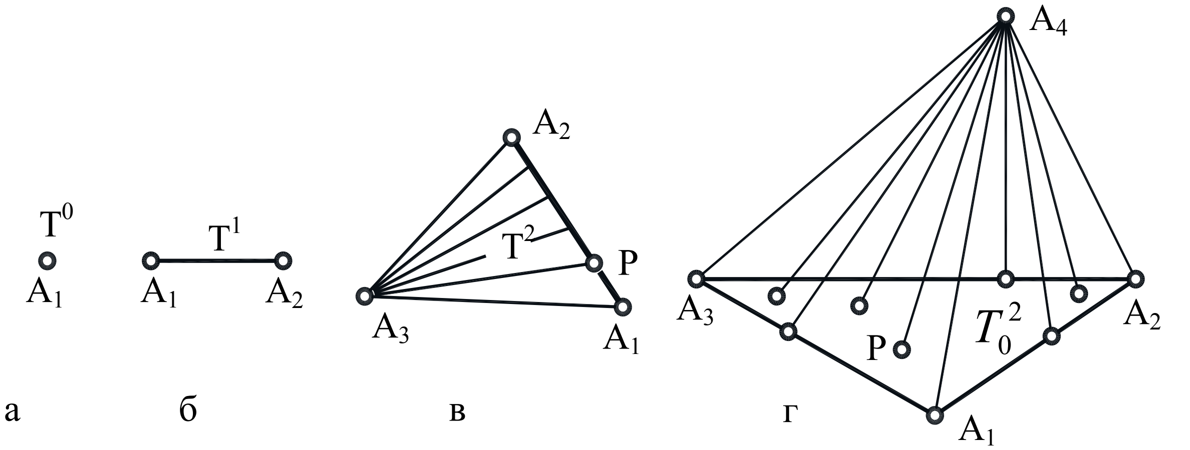

Рис.3. Формування n-вимірних симплексів

Знову візьмемо точку (центр проекцій) A_4, що не належить площині трикутника, та з'єднаємо кожну точку трикутника з обраною (рис.3г). Всі ці відрізки заповнюють тривимірний симплекс T^3. Симплекс $\overline{T}^3$ без вершини A_4 утворюється добутком замкненого симплексу T^2=$A_1A_2A_3$ на напіввідкритий відрізок PA_4. Додавши до цього добутку вершину A_4 (симплекс $\overline{T}^0$), отримаємо склад симплексу $\overline{T}^3$: $\overline{T}^3 = \overline{T}^2\left(T^1 + T^0\right) + T^0 = T^3 + 4T^2 + 6T^1 + 4T^0$. Таким чином замкнений тетраедр $\overline{T}^3$ складається із відкритого тетраедра T^3 та його границь:

4 граней, 6 ребер та 4 вершин.

Чотиривимірний симплекс утворюються аналогічно: беремо 5 незалежних точок (які не належать одному тривимірному простору E^3). На будь-які із них (A_1, A_2, A_3, A_4) натягнемо тривимірний симплекс T^3 , та всі його точки з'єднаємо з п'ятою точкою A_5 (рис. 4). Склад $\overline{T}^4$ також знаходиться як добуток напіввідкритого відрізка T^1+T^0 на повний склад замкненого симплекса $\overline{T}^3$ з додаванням до нього вершини A_5 (симплекса $\overline{T}^0$): $\overline{T}^4 = \overline{T}^3\left(T^1 + T^0\right) + T^0 = T^4 + 5T^3 + 10T^2 + 10T^1 + 5T^0$. Таким чином, границя чотиривимірного симплексу складається із 5 тетраедрів, 10 трикутників, 10 ребер та 5 вершин, які можна побачити на проекції симплекса $\overline{T}^4$ на тривимірний простір (див. рис.4).

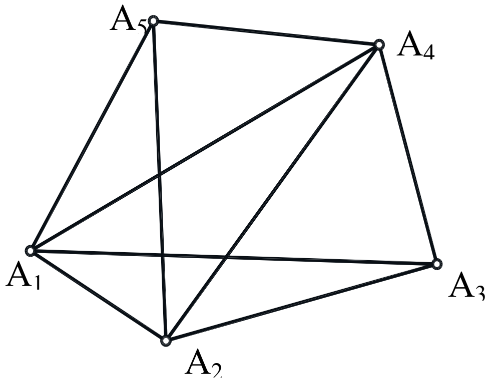

Рис.4. Проекція чотиривимірного симплекса на тривимірний простір

Узагальнимо такий підхід на простори інших розмірностей. В n-вимірному просторі на довільні n точок натягнемо (n–1)-вимірний симплекс T_0^{n-1}, та всі його точки з'єднаємо відрізками з n+1-ою точкою. Всі ці відрізки заповнять n-вимірний симплекс T^n, що натягнутий на n+1 точок. Узагальнена формула складу має вигляд: $\overline{T}^n = \overline{T}^{n-1}\left(T^1 + T^0\right) + T^0$.

Висновки. Було розглянуто кінематичний спосіб утворення багатовимірного куба шляхом переміщення (n-1) вимірного геометричного образу вздовж прямої лінії та виведено узагальнену формулу складу для куба.

Наведено алгоритм формування одно-, дво-, три- та чотиривимірного, симплексу центральним проекціюванням та обертанням напіввідрізків навколо вершини., проведено узагальнення на n-вимірні простори. Отримано формули складу для симплексів різних розмірностей та проведено їх узагальнення.

Література:

1. Бідніченко О.Г. Дослідження складу N-вимірних геометричних образів // Геометричне моделювання та інформаційні технології: Зб.наук.праць МНУ. – Миколаїв, 2016. С.17-21.

Статтю відправлено 01.06.2017 р.