ЦИТ: ua117-052
DOI: 10.21893/2415-7538.2016-05-1-052
УДК 512.543

Сікора В.С.

МІНІМАЛЬНІ СИСТЕМИ ТВІРНИХ ДЛЯ ГІПЕРОКТАЕДРАЛЬНОЇ ГРУПИ ТА ЇЇ НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна, м.Чернівці, вул. Коцюбинського, 2, 58000

Sikora V.S.

MINIMAL GENERATORS SYSTEMS FOR THE HYPEROKTAHEDRAL GROUP AND ITS NORMAL SUBGROUPS

Chernivtsi National University named Yurij Fedkovych, Chernivtsi, vul. Kotsybynskogo, 2, 58000

Анотація. Побудовано приклади мінімальних (щодо кількості елементів) систем твірних для нормальних дільників гіпероктаедральної групи.

Ключові слова: гіпероктаедральна група, вінцевий добуток, система твірних.

Abstract. The minimal (on quantity of elements) systems of generators are constructed for the normal subgroups of hyperoctahedral group.

Key Words: hyperoctahedral group, wreath product, system of generators.

Вступ та огляд літератури. Гіпероктаедральна група (група симетрій n-вимірного куба) — це група тих лінійних перетворень евклідового простору E_n, які діють на векторах ортонормованого базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ цього простору перестановками або замінами напрямків (тобто заміною $\overline{e}_i$ на $-\overline{e}_i$). Іншими словами, гіпероктаедральну групу можна розглядати як "найбільшу" кристалографічну групу гіперкубічної гратки, яку визначають як групу, породжену всіма лінійними комбінаціями вигляду $\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \overline{e}_k$, де x^k — інтегральні коефіцієнти та $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ — стандартний ортонормований базис n-вимірного евклідового простору E_n. Ця група має порядок $n! \cdot 2^n$ і, як абстрактна група, ізоморфна вінцевому добутку $S_n \wr Z_2$ симетричної групи S_n степеня n на циклічну групу Z_2. Гіпероктаедральні групи є одним з прикладів груп Вейля (типу B_n) [1]. Основні відомості про будову гіпероктаедральних груп зібрано в оглядовій статті [2]. У роботі [3] побудовано мінімальні (щодо кількості елементів) системи твірних групи $H_n = S_n \wr Z_2$ (яку також називатимемо гіпероктаедральною). Дану роботу присвячено побудові аналогічних систем твірних для нормальних дільників групи H_n.

Постановка задачі та методи. Елементами групи H_n є підстановки, які можна зображати у вигляді таблиць $u = [\sigma; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, де $\sigma \in S_n$ — деяка підстановка множини $\{1,2,...,n\}$; $\alpha_i \in Z_2 = \{\overline{0},\overline{1}\}$ (див. [3]). Добуток двох таблиць u та $v=[\tau;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n]$ визначається рівністю

$$u\cdot v=[\sigma\cdot\tau;\alpha_1+\beta_{\sigma(1)},\alpha_2+\beta_{\sigma(2)},\ldots,\alpha_n+\beta_{\sigma(n)}],$$

де “ + ” означає додавання в Z_2, а оберненою до u буде таблиця

$$u^{-1}=[\sigma^{-1};\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\alpha_{\sigma^{-1}(2)},\ldots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)}].$$

Опишемо нормальні дільники групи $H_n = S_n \wr Z_2$.

1) Тривіальними нормальними дільниками в гіпероктаедральній групі H_n будуть вона сама і підгрупа

$$L=\left\{[\varepsilon;\alpha,\alpha,...,\alpha]\mid \alpha=\overline{1} \text{ або } \alpha=\overline{0}\right\}=<[\varepsilon;\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}]>,$$

тобто $H_n \trianglelefteq H_n$ та $L \trianglelefteq H_n$.

2) $G_n = A_n \wr Z_2 = \left\{[\lambda;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\mid \lambda\in A_n, \alpha_i\in Z_2, i=\overline{1,n}\right\} \trianglelefteq S_n \wr Z_2$.

3) $W=\left\{[\pi;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\mid \pi\in S_n, \alpha_i\in Z_2, i=\overline{1,n}, \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\overline{0}\right\} \trianglelefteq S_n \wr Z_2$.

Неважко переконатися, що група W ізоморфна групі Вейля типу D_n.

4) $M=\left\{[\lambda;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\mid \lambda\in A_n, \alpha_i\in Z_2, i=\overline{1,n}, \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\overline{0}\right\} \trianglelefteq A_n \wr Z_2$,

причому $M \trianglelefteq W$.

5) $K=\left\{[\varepsilon;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\mid \varepsilon\in A_n, \alpha_i\in Z_2, i=\overline{1,n}\right\} \trianglelefteq A_n \wr Z_2$.

6) $T=\left\{[\varepsilon;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\mid \varepsilon\in A_n, \alpha_i\in Z_2, i=\overline{1,n}, \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\overline{0}\right\} \trianglelefteq K$ та $T \trianglelefteq M$.

Зауважимо, що описана вище підгрупа L є нормальним дільником в T.

Наведемо деякі допоміжні твердження.

Лема 1 [4]. *Підстановки* $a=(1,2,...,k)$ *та* $b=(1,2)$ *утворюють базу симетричної групи* S_k *(*$k\geq 3$*).*

Лема 2 [5]. *Пара підстановок* $a=(1,2,...,k)$ *та* $c=(1,2,...,m)$, *де* $2\leq m<k$, *буде базою симетричної групи* S_k *(якщо хоча б одна з підстановок* a *чи* c *є непарною), або знакозмінної групи* A_k *(якщо обидві підстановки* a, c *є парними).*

Лема 3 [6]. *Для довільного непарного* $k\geq 3$ *знакозмінна група* A_k *породжується підстановками* $(1,2,...,k)$, $(1,2,3)$ *або* $(1,2,...,k)$, $(3,4,...,k)$ *(остання пара при* $k\geq 5$*), а при довільному парному* $k\geq 4$ *— підстановками* $(1,2,...,k-1)$, $(2,3,...,k)$.

Мінімальні системи твірних групи $H_n = S_n \wr Z_2$ побудовано в [3]. Метою статті є побудова мінімальних систем твірних для нормальних дільників гіпероктаедральної групи H_n. Група L містить лише дві підстановки — $[\varepsilon;\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}]$ та $[\varepsilon;\overline{0},\overline{0},...,\overline{0}]$ — і є циклічною, породженою елементом $[\varepsilon;\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}]$. Тобто мінімальна система твірних групи L складається з однієї підстановки $h = [\varepsilon;\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}]$.

Доведено наступні 5 тверджень.

Теорема 1. *Для довільного натурального* $n \geq 4$ *мінімальними (щодо кількості елементів) системами твірних групи* $A_n \wr Z_2$ *є наступні:*

а) $\{u_1, u_2\}$, *якщо* $n \geq 5$ *— непарне, де*

$$u_1 = [(1,2,...,n);\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}], \quad u_2 = [(3,4,...,n);\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0},...,\overline{0}];$$

б) $\{v_2, v_2\}$, *якщо* $n \geq 4$ *— парне, де*

$$v_1 = [(1,2,...,n-1);\overline{1},\overline{0},...,\overline{0}], \quad v_2 = [(2,3,...,n);\overline{0},\overline{0},...,\overline{0}].$$

Зауваження. При побудові мінімальних систем твірних групи $G_n = A_n \wr Z_2$ випадки $n = 2$ і $n = 3$ нами не розглядаються, як тривіальні, оскільки знакозмінні групи A_2 та A_3 — циклічні.

Розглянемо тепер групу $W \trianglelefteq S_n \wr Z_2$. Має місце твердження.

Теорема 2. *Для довільного* $n \geq 4$ *група* W *є 2–породженою.*

Розглянемо групу M, визначену вище, яка є нормальним дільником в групах $A_n \wr Z_2$ та W.

Теорема 3. *Для довільного* $n \geq 5$ *група* M *є 2–породженою.*

Теорема 4. *Група* $K = \left\{[\varepsilon;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n] \mid \varepsilon \in A_n, \alpha_i \in Z_2, i = \overline{1,n}\right\}$ *для довільного натурального* $n \geq 3$ *є* n*–породженою.*

Теорема 5. *Група* T *для довільного натурального* $n \geq 3$ *є* $(n-1)$*–породженою.*

Висновки. Побудовано приклади мінімальних (щодо кількості елементів) систем твірних для нормальних дільників гіпероктаедральної групи. Отримані результати можна використовувати при побудові незвідних систем твірних вінцевих добутків скінченної (чи нескінченної) кількості симетричних, знакозмінних і циклічних груп та у нормальних підгрупах таких груп.

Література:

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1968. — 331с.

2. Baake M. Structure and representations of the hyperoctahedral group // J. Math. Phys.— 25 (11), November 1984. — P.3171–3182.

3. Сікора В.С. Двоелементні бази гіпероктаедральних груп // Вісник Київського університету. Серія фіз.–мат. науки.— 1999.— Вип.1.– С.87–93.

4. Калужнин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки. —М.: Наука, 1985. — 112с.

5. Isaacs I.M., Thilo Zieschang. Generating Symmetric Groups // Math. Notes. ─ 10 (1995).— P.734–738.

6. Пикар С. О базисах симметрической группы // Кибернетический сборник, Москва: Мир, 1965.— Вып. 1.— с.7–34.

7. Заводя М.В., Сікора В.С. Системи твірних нормальних підгруп гіпероктаедральної групи.— Вісн. Київськ. ун-ту. Серія: Фізико-математичні науки.– 2002.– N3.– С. 28–34.

8. Сікора В.С. Побудова мінімальних систем твірних для гіпероктаедральної групи та її нормальних підгруп // Сборник научных трудов SWorld.– 2015.– Том 21.– Вып. 1(38).– С.85-91.

Стаття відправлена: 31.03.2017 р.