10. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров: Пер. с англ. / Справочник. — М.: Атомиздат, 1979. — 216 с.

11. Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А. Тепломассообмен: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: Издательство МЭИ, 2005. – 550 с., ил.

12. Швець І.Т., Кіраконський М.Ф. Загальна теплотехніка та теплові двигуни. – Київ: Вища школа, 1977р. – 271с.

ІНТЕРНЕТ – РЕСУРСИ

http://economstroy.com.ua/montag-svoimy-rukamy/5917-yavuche-teploprovidnosti-v-budivnuztvi.html;

http://normamarket.ru/articles/teploizolyacziya-okon/

Стаття відправлена 3.04.2017

ЦИТ: ua117-024

DOI: 10.21893/2415-7538.2016-05-1-024

УДК 512.541+512.542

Попов И.Н.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ 0,1-МАТРИЧНЫХ ГРУПП СО СТРУКТУРНО ПОДОБНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Российская Федерация, 163002, г. Архангельск, набережная Северной Двины, 17

Popov I.N.

THE SOLUTION TO THE PROBLEM OF DECOMPOSITION OF A 0,1-MATRIX GROUPS WITH STRUCTURALLY SIMILAR FORMING

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Russian Federation, 163002, Arkhangelsk, Severnaya Dvina Emb. 17.

Аннотация. Предлагается решение проблемы разложения элементов подгруппы 0,1-матричной группы через ее образующие, получаемые из нулевой матрицы путем замены ее подматрицы на фиксированную матрицу. Доказываются теоремы о единственности разложения элементов в таких подгруппах и условиях их изоморфности.

Ключевые слова: матрица, группа, порождающие элементы группы, алгоритмическая проблема для групп.

Abstract. Proposed solution to the problem of decomposition of elements of the subgroup 0,1-matrix of the group forming subgroups derived from the zero matrix by replacing its submatrix of a fixed matrix. We prove a theorem on uniqueness of decomposition of elements in these subgroups and they were isomorphic.

Key words: matrix, group, generating elements of groups, algorithmic problem for groups.

Вступление. Одной из алгоритмических проблем конечно-порожденных групп является проблема разложения, которая заключается в том, что нужно найти алгоритм, по которому любой элемент группы можно выразить через ее образующие. Для ряда групп можно предложить однотипное решение, требуя от образующих группы определенное строение. Целью статьи является предложение решения проблемы разложения для подгрупп 0,1-матричной группы, которые порождаются матрицами, получаемые из нулевой матрицы путем замены ее подматрицы на фиксированную матрицу.

Основной текст. Пусть $Z_2=\{0;1\}$ и $0+0=1+1=0$, $0+1=1+0=1$. Тогда $(Z_2;+)$ – абелева группа. Аддитивную группу всех матриц размерности $m\times n$ с элементами из группы Z_2 с нулевой матрицей Θ обозначим $M_{m\times n}(Z_2)$. Такую группу называют 0,1-матричной группой или группой 0,1-матриц.

Пусть $X\in M_{\ell\times k}(Z_2)$ и $\Theta\in M_{m\times n}(Z_2)$, где $\ell\le m$ и $k\le n$.

Пусть i и j – натуральные числа такие, что $i-1+\ell\le m$ и $j-1+k\le n$. Символом $\Theta_{i,j}(X)$ обозначим матрицу из $M_{m\times n}(Z_2)$, которая получается из матрицы Θ путем замены в ней подматрицы, верхний левый угол которой совпадает с $(i;j)$-элементом, на матрицу X. Рассмотрим в группе $M_{m\times n}(Z_2)$ подгруппу $\Theta(X)$, порожденную матрицами $\Theta_{i,j}(X)$, где $i\in\{1;2;\ldots;m-\ell+1\}$ и $j\in\{1;2;\ldots;n-k+1\}$; $\Theta(X)=\left\langle \Theta_{1,1}(X);\ldots;\Theta_{m-\ell+1,n-k+1}(X)\right\rangle$. Число образующих группы $\Theta(X)$ равно $(m-\ell+1)(n-k+1)$.

Например, если $X=(11\ldots1)\in M_{1\times k}(Z_2)$, то $\Theta(X)=R_{n,k}$ – группа матриц-строк [1;3]; если в матрице $X\in M_{\ell\times k}(Z_2)$ элементы равны 1, то $\Theta(X)=SQ_{m\times n}^{\ell\times k}$ – группа матриц-квадратов [2;4]; $\Theta(X)=M_{m\times n}(Z_2)$, если $X=(1)\in M_{1\times 1}(Z_2)$.

В дальнейшем будем придерживаться введенных выше обозначений.

Теорема. В группе $\Theta(X)$ для произвольной матрицы X каждая матрица имеет единственное разложение через ее образующие.

Доказательство. Пусть $A\in\Theta(X)$ и

$$A=\Theta_{\alpha_1\beta_1}(X)+\Theta_{\alpha_2\beta_2}(X)+\ldots+\Theta_{\alpha_u\beta_u}(X),$$

$$A=\Theta_{\gamma_1\delta_1}(X)+\Theta_{\gamma_2\delta_2}(X)+\ldots+\Theta_{\gamma_v\delta_v}(X),$$

где $u,v\in\{1;2;\ldots;(m-\ell+1)(n-k+1)\}$,

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_u,\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_v\in\{1;2;\ldots;m-\ell+1\}$,

$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_u,\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_v\in\{1;2;\ldots;n-k+1\}$,

$(\alpha_1;\beta_1),(\alpha_2;\beta_2),\ldots,(\alpha_u;\beta_u)$, так же как и $(\gamma_1;\delta_1),(\gamma_2;\delta_2),\ldots,(\gamma_v;\delta_v)$, – попарно различные пары.

Будет считать, что

$$(\alpha_1;\beta_1)\prec(\alpha_2;\beta_2)\prec\ldots\prec(\alpha_u;\beta_u) \text{ и } (\gamma_1;\delta_1)\prec(\gamma_2;\delta_2)\prec\ldots\prec(\gamma_v;\delta_v),$$

где $\prec$ – лексикографический порядок на парах натуральных чисел.

Если предположить, что $(\alpha_1;\beta_1)\ne(\gamma_1;\delta_1)$ и $(\alpha_1;\beta_1)\prec(\gamma_1;\delta_1)$, то, используя первое разложение, $(\alpha_1;\beta_1)$-элемент матрицы A равен 1. Используя же второе разложение этой матрицы, этот элемент равен 0. Приходим к противоречию. Тогда

$A+\Theta_{\alpha_1\beta_1}(X)=\Theta_{\alpha_2\beta_2}(X)+\ldots+\Theta_{\alpha_u\beta_u}(X)$,

$A+\Theta_{\alpha_1\beta_1}(X)=\Theta_{\gamma_2\delta_2}(X)+\ldots+\Theta_{\gamma_v\delta_v}(X)$.

Аналогично рассуждая, получаем, что

$u=v$ и $(\alpha_1;\beta_1)=(\gamma_1;\delta_1),(\alpha_2;\beta_2)=(\gamma_2;\delta_2),\ldots,(\alpha_u;\beta_u)=(\gamma_u;\delta_u)$.

Следовательно, матрица A имеет единственное разложение.

Отсюда получаем, что $|\Theta(X)|=2^{(m-\ell+1)(n-k+1)}$ – порядок группы $\Theta(X)$.

Теорема. Пусть $X,Y\in M_{\ell\times k}(Z_2)$. Тогда группы $\Theta(X),\ \Theta(Y)\subseteq M_{m\times n}(Z_2)$ изоморфны.

Доказательство. Изоморфизм $\varphi:\Theta(X)\to\Theta(Y)$ задается равенством:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m-\ell+1}\sum_{j=1}^{n-k+1}\varepsilon_{ij}\Theta_{ij}(X)\right)=\sum_{i=1}^{m-\ell+1}\sum_{j=1}^{n-k+1}\varepsilon_{ij}\Theta_{ij}(Y),$$

где $\varepsilon_{ij}\in Z_2$ для всех $i\in\{1;2;\ldots;m-\ell+1\}$ и $j\in\{1;2;\ldots;n-k+1\}$.

Решение проблемы разложения для группы $\Theta(X)$ следующее.

Пусть $A\in\Theta(X)$ и $A\neq\Theta$. В матрице A определяется $(\alpha_1;\beta_1)$-элемент, равный 1, что для всех пар $(\alpha;\beta)$, меньших $(\alpha_1;\beta_1)$ относительно порядка $\prec$, все $(\alpha;\beta)$-элементы матрицы A равны 0. Затем аналогично находится $(\alpha_1;\beta_1)$-элемент матрицы $A+\Theta_{\alpha_1\beta_1}(X)$ и так далее. На некотором этапе получается:

$$A+\Theta_{\alpha_1\beta_1}(X)+\Theta_{\alpha_2\beta_2}(X)+\ldots+\Theta_{\alpha_u\beta_u}(X)=\Theta,$$

откуда $A=\Theta_{\alpha_1\beta_1}(X)+\Theta_{\alpha_2\beta_2}(X)+\ldots+\Theta_{\alpha_u\beta_u}(X)$ – искомое разложение.

Пример. Пусть $X\in M_{3\times3}(Z_2)$, $A\in\Theta(X)\subset M_{4\times6}(Z_2)$ и

$$X=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}\quad A=\begin{vmatrix}1&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\end{vmatrix}$$

Группу $\Theta(X)$ образуют 8 матриц, поэтому $|\Theta(X)|=256$.

Найдем разложение матрицы A в этой группе.

Так как в матрице A левая верхняя 1 совпадает с ее $(1;1)$-элементом, то матрица $\Theta_{11}(X)$ будет входить в искомое разложение. При этом:

$A+\Theta_{11}(X)=$

$$=\begin{vmatrix}1&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1&1&1&0\\1&0&1&1&1&0\\1&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\end{vmatrix}$$

В получившейся матрице левая верхняя 1 – это $(1;3)$-элемент. Тогда в разложение матрицы $A+\Theta_{11}(X)$ входит матрица $\Theta_{13}(X)$ и

$A+\Theta_{11}(X)+\Theta_{13}(X)=$

$$=\boxed{\begin{matrix}0&0&1&1&1&0\\1&0&1&1&1&0\\1&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\end{matrix}}+\boxed{\begin{matrix}0&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix}0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&0&0&1&0&0\end{matrix}}$$

Матрица $\Theta_{21}(X)$ входит в разложение матрицы $A+\Theta_{11}(X)+\Theta_{13}(X)$ и

$A+\Theta_{11}(X)+\Theta_{13}(X)+\Theta_{21}(X)=$

$$=\boxed{\begin{matrix}0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&0&0&1&0&0\end{matrix}}+\boxed{\begin{matrix}0&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&0\end{matrix}}$$

Получили: $A+\Theta_{11}(X)+\Theta_{13}(X)+\Theta_{21}(X)=\Theta_{22}(X)$, отсюда

$$A=\Theta_{11}(X)+\Theta_{13}(X)+\Theta_{21}(X)+\Theta_{22}(X).$$

Разложение содержит 4 матрицы. При этом: $(1;1)\prec(1;3)\prec(2;1)\prec(2;2)$.

Заключение и выводы. Выяснены свойства подгрупп группы 0,1-матриц, образованные матрицами определенного вида, связанные с числом разложений элементов, им принадлежащие, и их порядком. Указан алгоритм решения проблемы разложения для таких подгрупп.

Литература:

1. Попов И.Н. Решение проблем разложения и вхождения для группы матриц-квадратов (случай 2x2) // Научные труды SWorld;. международное периодическое научное издание. – Иваново: Научный мир, 2016. – Вып. 2(43). – Том 7. – ЦИТ: 216-011.– С. 29-34. – ISSN 2224-0187 (P). – ISSN 2410-6720 (O).

2. Попов И.Н. Решение проблем разложения и вхождения для группы матриц-строк (случай 2 единиц) // Научные труды SWorld;. международное периодическое научное издание. – Иваново: Научный мир, 2016. – Вып. 2(43). – Том 7. – ЦИТ: 216-012.– С. 34-38. – ISSN 2224-0187 (P). – ISSN 2410-6720 (O).

3. Попов И.Н. Оптимизация решения алгоритмических проблем разложения и вхождения для группы матриц-квадратов // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. 30-31 марта 2016 г. / отв. ред. Ю.С. Нагорнов. – Ульяновск: ЗЕБРА, 2016. – С. 22-30.

4. Попов И.Н. Оптимизация решения алгоритмических проблем разложения и вхождения для группы матриц-строк // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. 30-31 марта 2016 г. / отв. ред. Ю.С. Нагорнов. – Ульяновск: ЗЕБРА, 2016. – С. 30-37.

Статья отправлена: 20.03.2017 г.